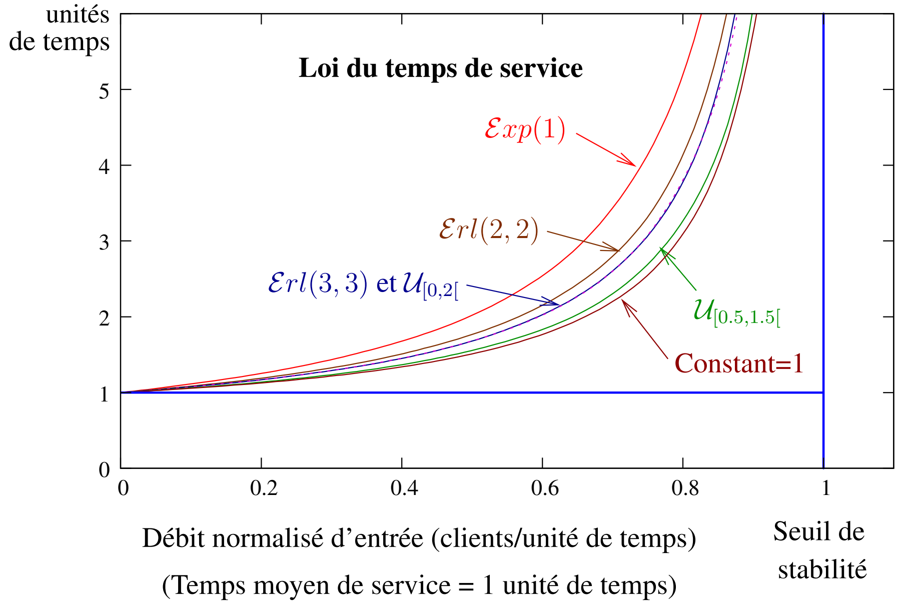
Analyse du temps moyen de réponse dans une file $M/GI/1$

Contexte L'objectif est d'analyser l'importance de la distribution du temps de service sur le temps de réponse dans une file d'attente $M/GI/1$ avec un ordonnancement FIFO. Le processus d'arrivée est un processus de Poisson de taux λ (débit), les clients ont un temps de service de moyenne 1 pris comme unité de temps de référence.

Méthode Simulation équationnelle à partir de la relation de récurrence sur les temps de réponse (équation de Lindley).

Plan d'expérience Pour chaque loi et pour des valeurs de λ de 0 à 0.95 avec un pas de 0.01 on estime le temps de réponse moyen des clients sur des échantillons de taille $N = 10000$. Les intervalles de confiance sont suffisamment petits pour ne pas être visualisés (les écarts entre les courbes sont significatifs). On effectue une interpolation entre les points par la méthode de Bézier.

Temps de réponse moyen en fonction de la charge en entrée



Discussion On remarque au préalable que toutes les courbes sur la figure ont la même forme; au dessus de la droite $y = 1$ qui correspond au temps moyen de service (ce qui est logique car le temps de réponse est égal au temps de service plus un temps d'attente lié à la contention pour l'accès au serveur). Lorsque λ, le débit d'entrée est très faible, il n'y a pas de contention, donc pas d'attente et le temps moyen de réponse est égal au temps moyen de service ($= 1$) et ceci indépendamment de la loi du temps de service. Le système est stable pour $\lambda < 1$ et on observe bien la singularité en $\lambda = 1$ pour toutes les lois de service (asymptote verticale que l'on devine mais qui est impossible à approcher car les simulations deviennent de plus en plus instables pour les valeurs de λ proches de 1).

On peut également interpréter le temps moyen de réponse par rapport aux aspects aléatoires du système. 1 correspond au temps de réponse s'il n'y avait pas contention. La distance entre la courbe $y = 1$ et la courbe brune (temps de service constant) correspond à la contention liée à la variabilité des arrivées. L'écart entre le courbe brune et les autres correspond à l'impact de la variabilité du temps de service sur le temps de réponse. Ensuite on observe que les courbes sont comparables dans l'ordre de leur variance :

Loi de S	Constant	$\mathcal{U}_{[0.5,1.5]}$	$\mathcal{U}_{[0,2]}$	$\mathcal{E}rl(3,3)$	$\mathcal{E}rl(2,2)$	$\mathcal{E}(1)$
Variance	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

Les deux courbes confondues (loi $\mathcal{U}_{[0,2]}$ et $\mathcal{E}rl(3,3)$) correspondent à des lois ayant la même variance. on pourrait donc conjecturer que le temps moyen de réponse ne dépend que du débit normalisé d'entrée et de la variance du temps de service. La forme de la loi n'a pas d'importance, seule compte la variance (ce qui est étonnant et qui sera confirmé par la théorie, *Formule de Pollatczek-Kintchine*).