# Communications Numériques

# *Examen Final*

Romain Couillet

*Rappel :* On dénote et on utilisera $Q(x)$ la fonction

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

définie comme la fonction de distribution associée à la probabilité gaussienne

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

lorsque $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.

## I. Questions de cours (10 points)

**Question 1.** Considérons le canal de communications réel sans fil

$$y_n = hx_n + z_n \tag{1}$$

où $x_n$ dénote le signal transmis au temps $n$, issu d'un processus centré et de variance $\sigma_x^2$, $h$ un facteur d'atténuation connu du récepteur, $z_n$ le bruit additif, gaussien blanc, de variance $\sigma_z^2$, et $y_n$ le signal reçu.

– Rappelez la définition de la capacité d'un canal de transmission. Si la bande passante de transmission est $B$, quelle est l'expression de la capacité $C$ du canal (1) en bits par seconde ?

– Si $x_n \in \{1, -1\}$, $P(x_n = 1) = P(x_n = -1) = \frac{1}{2}$, quel est le taux d'erreur binaire obtenu à la sortie d'un décodeur symbole par symbole ? Citez des stratégies possibles pour diminuer ce taux d'erreur.

– Supposons désormais que l'on utilise $M$ antennes du côté récepteur au lieu d'une seule, de sorte à obtenir un canal de type

$$\begin{aligned} y_n^{(1)} &= h^{(1)} x_n + z_n^{(1)}, \\ y_n^{(2)} &= h^{(2)} x_n + z_n^{(2)}, \\ \vdots &= \vdots \\ y_n^{(M)} &= h^{(M)} x_n + z_n^{(M)}, \end{aligned} \tag{2}$$

avec $h^{(i)}$ l'atténuation sur le trajet de l'émetteur au récepteur $i$. Les $h^{(i)}$ sont supposés connus à tout instant du récepteur. Les $z_n^{(i)}$ sont tous blancs gaussiens centrés, de variance $\sigma^2$. En utilisant une à plusieurs antennes parmi les $M$, proposez une stratégie simple de détection permettant de diminuer le taux d'erreur binaire par rapport au cas mono-antenne. Quel est alors le nouveau taux d'erreur binaire ?

Lorsque le récepteur est en mouvement (ex. téléphone mobile), les atténuations des canaux $h^{(i)}$ changent (mais restent connus du récepteur). En suivant la stratégie précédente, que doit-on alors faire pour garder une probabilité d'erreur faible ? Expliquez alors un avantage important de posséder plusieurs antennes (cet avantage est lié à la notion dite de *diversité du canal*).

Si l'on augmente encore le nombre d'antennes, le taux d'erreur diminuera-t-il sans limite ? Pourquoi ?

**Question 2.**

- Qu'est-ce que le codage de source et le codage de canal ? Citez un exemple classique de codage de source et un exemple simple de codage de canal.
- Considérez la phrase suivante

  C_T EX_MEN E_T TR_S FAC_L_.

  La langue française est-elle un codage de source efficace (la source est l'idée à transmettre) ? Est-ce un codage de canal efficace (le canal est le support d'écriture) ? Expliquez.

**Question 3.** Considérez la séquence $y_1, \dots, y_N$ reçue après émission des symboles $x_1, \dots, x_N$ dans un canal à mémoire (i.e. canal qui introduit de l'interférence entre symboles),

$$y_n = x_n + h_1 x_{n-1} + \cdots + h_L x_{n-L} + z_n$$

avec $z_n$ un bruit additif blanc gaussien complexe de variance $N_0$.

- Quelle est la différence entre un décodage symbole par symbole et un décodage conjoint de $x_1, \dots, x_N$ ? Quels sont les avantages et inconvénients de chacun ?
- A quoi sert l'algorithme de Viterbi ? Quelle est sa complexité ?
- Est-il avantageux d'effectuer un décodage conjoint, si
  - $\sum_{i=1}^{L} |h_i|^2$ est petit devant $1$ ?
  - $L$ est petit ?
- Une entreprise vous demande conseil sur le développement d'un appareil de communication sans fil à haut débit consommant très peu d'énergie. Qu'allez vous commencer par leur expliquer ?

## II. Exercices (10 points)

**Exercice 1.** Soit un texte formé à partir de l'alphabet "A,B,C,D,E", dans lequel apparaît exactement 280 fois la lettre A, 508 fois la lettre B, 502 fois la lettre C, 395 fois la lettre D et 815 fois la lettre E. Donnez le code de Huffman pour l'écriture de ce texte en base 2. Quelle est la longueur en bits du texte encodé ? Avant même d'effectuer un codage de Huffman (ou autre), est-il possible de donner une borne inférieure sur la longueur du mot encodé ? Si oui, que vaut cette borne inférieure et est-elle atteinte ici ?

**Exercice 2.** Un modulateur numérique prend en entrée une séquence de bits $b_i$ indépendants avec probabilité $P(b_i = 0) = \frac{1}{4}$ et $P(b_i = 1) = \frac{3}{4}$, et produit les symboles

| $b_1\ b_2$ | $a$ |
|---|---|
| 00 | $-\frac{3}{2}d$ |
| 01 | $-\frac{1}{2}d$ |
| 10 | $\frac{1}{2}d$ |
| 11 | $\frac{3}{2}d$ |

L'énergie moyenne du signal $a$ est égale à 1. Le signal reçu est $y = a + n$ où $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

- Que vaut $d$ pour satisfaire la contrainte de puissance ?
- Déterminez la région de décision MAP (maximum a posteriori) pour le symbole 11. Calculez la probabilité d'erreur de détection de ce symbole.
- Déterminez la région de décision MAP pour les autres symboles,
  - quand $d^2 \geq \sigma^2 \ln(3)$,
  - et quand $d^2 < \sigma^2 \ln(3)$.
- Tracer les régions de décision pour $\sigma^2 = 0$, $\sigma^2 = d^2/\ln(3)$ et $\sigma^2 = \infty$. Interprétez.
- Donnez alors la probabilité d'erreur de détection moyenne lorsque $\sigma^2 = d^2/\ln(3)$.

**Exercice 3.** Considérez le signal $y = x + \frac{1}{2}z + \nu$, où $x \in \{1, -1\}$ est le signal transmis, $z \in \{1, -1\}$ est un signal interférant, tous deux d'entrées équiprobables, et $\nu$ est une variable de bruit additif, de distribution

$$p_\nu(t) = \begin{cases} 0 & , |t| \geq 1 \\ t+1 & , -1 < t < 0 \\ 1-t & , 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

- Quelle est la probabilité de l'événement $y = 1.2$ ?
- Donnez les régions de décisions MAP (maximum a posterio) pour la détection de $x$.
- Quelle est la probabilité d'erreur moyenne ?