

Rapport sur le mémoire d'habilitation à diriger des recherches  
de Panayotis Mertikopoulos,

« Online optimization and learning in games : theory and applications »

L'optimisation et la théorie des jeux partagent deux points communs essentiels : dans les deux cas des agents souhaitent y optimiser leurs gains, et en pratique cela est souvent fait de manière dynamique. Le but étant de déterminer des choix optimaux, ou du moins des équilibres, en un temps le plus rapide possible. Une façon abstraite de concevoir ces procédés consiste, partant d'un problème d'optimisation ou d'un jeu, à construire un champ de vecteurs reflétant la logique stratégique locale des divers agents et de laisser le temps évoluer. On espère alors que, de proche en proche, les stratégies s'ajustent pour atteindre certains équilibres désirables. Précisons que les problèmes d'optimisation considérés dans ce mémoire ont une nature très générale qui les rapproche d'une perspective de théorie des jeux. L'agent ne fait pas en effet face à un coût fixe qu'il devrait optimiser mais à une suite de problèmes d'optimisation évoluant avec le temps et pour lesquels une seule action est permise par instant. La question algorithmique se complique donc considérablement car l'on doit réagir dans des univers très mouvants et le choix optimal d'un jour ne l'est plus le lendemain. D'un certain point de vue, on peut considérer que la nature est tantôt adversaire, tantôt collaboratrice de l'agent optimisateur.

Ainsi le rôle du temps est un élément central de cette thèse : il n'est pas uniquement un temps artificiel qui porte l'évolution d'un processus algorithmique, il est aussi le lieu où se déploient des antagonismes stratégiques qui peuvent être endogènes ou exogènes.

Cet aspect est reflété dans le titre par le vocable « online » signifiant que l’agent doit développer sa logique optimisatrice à chaque instant.

Ces lignes de recherches sont très actives aujourd’hui en raison de la centralité des données massives, de l’IA et des réseaux de neurones adversariaux. C’est dans ce cadre que les travaux de Mertikopoulos s’inscrivent.

Le premier chapitre présente le plan du mémoire alors que le deuxième introduit les outils essentiels de théorie des jeux et esquisse un état de l’art des méthodes de « non-regret ». Ces méthodes constituent les résultats fondateurs de l’optimisation en ligne, il permettent, partant de la notion de regret, de développer des algorithmes qui apportent des réponses acceptables au coût moyen courant.

Les premières contributions de Mertikopoulos sont présentées au sein du très original chapitre 3. Celui-ci propose des approches de type équation différentielle à la résolution en ligne. Y sont d’abord introduites des dynamiques de l’optimisation en ligne « continue » : l’agent fait face à un flot continu de paiements auquel il doit constamment s’ajuster. Pour ce faire, les objectifs sont agrégés par intégration de sorte à généraliser l’approche usuelle d’absence de regret. Mertikopoulos, inspiré par des « dynamiques de gradient duales<sup>1</sup> », fournit alors un cadre géométrique à la Legendre permettant de dualiser les contraintes par un jeu de difféomorphismes. Cela permet, via certaines familles d’équations différentielles, d’optimiser le regret en  $O(1/T)$ , améliorant ainsi la borne discrète d’un facteur de  $1/\sqrt{T}$ .

Les dynamiques de jeux finis sont abordées selon un protocole similaire. La structure de dualisation est appliquée aux simplexes<sup>2</sup> et vient recalibrer les logiques de gain marginal des divers joueurs de sorte à assurer la réalisabilité de la dynamique. Dans ce cadre, où les oppositions stratégiques sont franches, Mertikopoulos identifie de nouveaux phénomènes :

- pour les jeux où l’antagonisme est radical, i.e. les jeux à somme nulles, les dynamiques sont hamiltonniennes et présentent donc des phénomènes de récurrence à la Poincaré,
- pour les jeux où les joueurs ont des intérêts communs, comme les jeux de potentiels, ou de la rigidité, e.g. les jeux monotones, des phénomènes de convergence vers des équilibres de Nash ou autres apparaissent.

D’autres phénomènes sont identifiés comme, par exemple, l’élimination des stratégies dominantes.

Dans un second temps, la question aléatoire est considérée et de nouveaux résultats sont établis dans ce cadre. On y retrouve des propriétés qualitatives semblables au cas déterministe, mais avec un certain affaiblissement des résultats<sup>3</sup> : par exemple les

---

1. Duale de dynamiques hessiennes  
2. Représentant les stratégies mixtes des joueurs.  
3. Ce qui est naturel en présence d’aléas

bornes de regret pour l'apprentissage en ligne chutent à  $O(1/\sqrt{T})$

Un quatrième chapitre est consacré aux pendants discrets des dynamiques du chapitre précédent. La question est essentielle car elle est nécessaire pour mettre en oeuvre des méthodes de résolution pratique. Le travail préalable fait sur les EDO simplifie considérablement la compréhension de cette approche algorithmique : fonctions de Liapounov, intégrales premières, effets de bords deviennent intuitifs et soutiennent la compréhension des phénomènes discrets. Les propriétés qualitatives obtenues dans ce cadre algorithmique sont ainsi très similaires –même si les dynamiques de regret ont, classiquement, une complexité moindre (attribuable aux questions de discrétisation). Les propriétés de convergence pour l'apprentissage en ligne, les jeux de potentiels ou les jeux monotones sont conservées. Des phénomènes de récurrence apparaissent pour les jeux à sommes nulles.

Les deux derniers chapitres traitent de sujets concrets sur lesquels les théories développées préalablement sont appliquées. Le chapitre 5 aborde la question délicate des parallélisations massives en calcul algorithmique. Pour les très gros problèmes, ces dernières peuvent entraîner, en raison d'approximations machines, un dépareillement des routines algorithmiques qui s'aggrave avec le temps faussant ainsi les résultats souhaités. P. Mertikopoulos montre comment une approche via l'absence de regret et la théorie des jeux permet de contrer ces difficultés. Un autre chapitre est consacré à l'étude des réseaux sans fils par l'une des nombreuses techniques proposées dans ce mémoire.

La lecture de cette HDR est passionnante, tant par la justesse et la précision de sa présentation, que par sa matière et la variété des points de vue développées. Un des aspects excitants de ce mémoire est la mise en regard de la variété topologique des dynamiques et de celle des interactions stratégiques, le tout au travers d'un prisme géométrique très vivifiant. Les questions abordées et les méthodes utilisées couvrent de nombreux champs : l'optimisation déterministe et stochastique, la théorie des jeux, les équations différentielles, les techniques géométriques, et les questions pratique de réseaux de télécommunication. Les pistes ouvertes sont multiples, originales, et très prometteuses, comme en témoigne le foisonnant chapitre 7.

P. Mertikopoulos confirme ici sa stature internationale, et son rôle de premier plan dans le champ fécond des dynamiques pour les jeux et l'optimisation.

Je recommande avec grand enthousiasme la tenue de la soutenance de HDR de Panayotis Mertikopoulos.

Jérôme Bolte,  
Université Toulouse Capitole,  
Toulouse School of Economics & ANITI

