Approximations de fonctions : série de Fourier et développements limités

Nicolas Gast

15 janvier 2006

Exercice 1. Décomposition en série de Fourier

On considère la fonction :

$$f_n(t) = \frac{4}{\pi} * \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2*k+1} \sin(2*(2*k+1)*\pi*t)$$

a. Représenter les fonctions $f_n(x)$ entre $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ sur un graphique pour n=4, n=10 et n=15.

b. La suite de fonction semble avoir une limite : quelle est-elle ?

Définition

La décomposition en série de Fourier d'un signal periodique g de periode T est une formule de décomposition en sinus et en cosinus. On la note $S(t)$·

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(2n\frac{t}{T}) + b_n \sin(2n\frac{t}{T})\right)$$

a_n et b_n représentent les valeurs des différents harmonique. Ils peuvent être calculer par les formules suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cos(2n\frac{t}{T})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \sin(2n\frac{t}{T})$$

Par la suite, on prendra T=1 dans toutes les applications numériques.

Fonction triangle

On définit une fonction g periodique de periode 1 par :

$$\forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] : g(t) = t$$

c. Montrer que les coefficients de a_k sont nuls.

On peut montrer que les coefficients b_k sont $\frac{(-1)^k}{k}\frac{2}{\pi}$.
Soit $g_n = \sum_{k=1}^{n} \left(b_n sin(2nt)\right)$

d. Superposer sur un même graphique les fonctions g, g_5 et g_{10}.

Développements limités

Un développement limité est une approximation d'une fonction au voisinage d'un point fixé. Si f est une fonction n fois dérivable, le développement limité en 0 à l'ordre n est :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(0)x^k + o(x^n)$$

Les développement limités ont une importance considérable : généralement on considère que le développement limité est exact pour un n assez grand et on peut donc approximer des fonctions "complexes" par des polynômes. Il peut y avoir plusieurs type d'applications :

- *En physique* - On approxime souvent une fonction par son développement limité à l'ordre 1 : f(x) = f(0) + x f'(x), ce qui permet de rendre linéaires certains problèmes que l'ont ne sait pas résoudre, par exemple les équations du *pendule*).
- *En informatique* - On peut se servir des développements limités pour calculer des approximations de fonctions (mais c'est loin d'être la seule application, je vous rassure).

Exercice 2. Notion de rayon de convergence

Pour calculer un développement limité à l'odre n avec Maple, on peut se servir de la fonction `series`.

a. A l'aide des fonctions `series` et `convert` (tapez `? series` pour connaître l'utilisation de cette commande), écrire une fonction calculant un polynôme correspondant au développement limité de la fonction $\exp(x)$ à l'ordre n.

b. Sur un graphique, représenter les développements limités aux ordres 2 à 10 ainsi que la fonction $\exp(x)$, pour x variant entre 0 et 3.

c. Sur un deuxième graphique, tracer les développements limités aux ordres 11 à 20 ainsi que la fonction $\exp(x)$. Vers quoi ces polynômes tendent-ils ?

d. Recommencer les questions précédentes avec la fonction $\frac{1}{1+x}$ (avec y variant entre 0 et 1). Quelles différences peut-on remarquer pour les points $x > 1$?

Exercice 3. Calcul de cosinus à l'aide de développement limité

a. Trouver un ploynôme approximant cosinus entre 0 et Pi/2 à 10^{-6} près (c'est à dire $\forall x \in [0; \pi/2]$: $|P(x) - \cos(x)| \leq 10^{-6}$)

b. En déduire un algorithme permettant de calculer de façon approchée le cosinus entre 0 et $\pi/2$ en utilisant uniquement des multiplications et additions.

c. En utilisant la commande `floor`, en déduire un algorithme capable de calculer un cosinus approché pour tout x réel.

Exercice 4. Du dénombrement à l'aide de développement limités ?

Le développement limité de la fonction $\frac{1}{x}$ au voisinnage de 0 est : $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$. Le coefficient du n^{ième} terme du développement correspond au nombre de combinaisons possibles pour faire n euros avec des pièces de 1 euros (ok, tous les coefficients sont 1).

Si on s'intéresse à $P(x^2) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$, on peut remarquer que le coefficient du n^{ième} correspond au nombre de combinaisons possibles avec des pièces de 2 euros (0 dans le cas où n est impair, 1 sinon).

Maintenant on peut remarquer (et ceci est beaucoup plus intéressant) que le nombre de combinaisons pour obtenir n à l'aide de pièces de 1 et 2 euros est le n^{ième} coefficient de $P(x).P(x^2)$.

a. Comprendre pourquoi

On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$

b. Écrire une procédure permettant de calculer le n^{ième} terme du développement limité de f. (indication : utilisez les commandes `taylor` et `coef`).

c. En déduire le nombre de façon de payer 1000 euros avec des pièces de 1, 2 et des billets de 5.

d. En considérant la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, déterminer la suite solution de l'équation $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i}$ (indication : calculer $f(x)f(x)$)

e. En déduire le nombre d'arbre binaire à n sommets (pas besoin de Maple !)