Examen: Évaluation de performance. Durée: 2h

Auteur: Nicolas Gast et Bruno Gaujal

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la clarté de la présentation.

Seul document autorisé : une page (recto-verso).
Sont interdits *: tout autre document, les ordinateurs, les téléphones (incluant smartphone, tablettes,... tout ce qui contient un dispositif électronique). Seuls les dictionnaires papier pour les personnes de langue étrangère sont autorisés.*

Barème indicatif : Exercice 1 (3 points), Exercice 2 (5 points), Exercice 3 (4 points), Exercice 4 (8 points),

Exercice 1: Intervalles de confiance

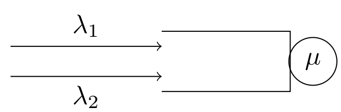
Bart et Lisa jouent tranquillement à Risk lorsque Bart accuse sa soeur de tricher : “le dé que tu utilises est pipé. Sur les 80 derniers lancés, tu as obtenu 20 fois la valeur 6 alors que tu aurais dû ne l'obtenir que [80/6 ≈]13 fois”. Ce à quoi Lisa répond : “mais non, j'ai juste eu de la chance”.

1. Notons B une variable valant 1 avec probabilité 1/6 et 0 avec probabilité 5/6. Quelle est la variance de B ?
2. Calculer un intervalle de confiance sur le nombre de 6 que l'on observe après les 80 lancés de Lisa (on posera $\sqrt{80} \approx 9$).
3. Faut-il donner raison à Bart ou à Lisa ?

Exercice 2: File d'attente

On considère un unique serveur. Deux types de paquets arrivent dans le système : des paquets de type 1 arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ_1 et des paquets de type 2 arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ_2. Le temps de service d'un paquet de type 1 ou de type 2 est exponentiellement distribué de paramètre μ (et donc de moyenne $1/\mu$).

On suppose que les paquets de type 1 ont priorité sur les paquets de type 2 et que la priorité est préemptive (si un paquet de type 1 arrive alors qu'un paquet de type 2 était en train d'être servi, le service du paquet de type 2 est mis en pause jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de paquets de type 1 dans la file).



1. *(Stabilité)* Pour quelles valeurs de λ_1, λ_2 et μ le système est-il stable ? (expliquer ce qu'est la stabilité).
2. *(Markov ?)* On note $N_1(t)$ et $N_2(t)$ le nombre de paquets de type 1 et 2 présents dans le système au temps t. Parmi les processus suivants, lesquels sont des chaînes de Markov (**justifier**) :
   a) N_1
   b) N_2
   c) $N_1 + N_2$
   d) $N_1 N_2$
3. Calculer le nombre moyen de paquets de type 1, puis le nombre moyen de paquets de type 2 en régime stationnaire.
4. En déduire le temps de réponse moyen d'un paquet de type 1 et celui d'un paquet de type 2 en régime stationnaire.
5. Application numérique : quel est le nombre de paquets moyen et le temps de réponse moyen (temps de séjour moyen) des paquets de type 1 et de type 2 lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\mu = 4$.

Exercice 3: La roue de la fortune

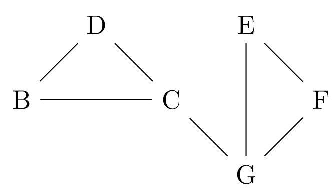
Vous participez au jeu suivant : Vous devez lancer une roue crantée avec 10 zones, rapportant respectivement 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, et 10000 Euros. Vous avez droit à faire 4 lancés de la roue au maximum. Après chaque lancé, vous pouvez soit arrêter et gagner le total affiché sur la roue, soit tenter votre chance à nouveau. Bien sûr si vous lancez pour la 4eme fois, c'est ce coup final qui donne votre gain.

1. Donner une formule de programmation dynamique pour calculer votre stratégie optimale, c'est à dire qui vous permet de maximiser votre espérance de gain.
2. Calculez la stratégie optimale et expliquez la en disant quelle est votre façon de jouer et calculez votre espérance de gain.

Exercice 4: Marche aléatoire

1. Considérons une chaîne de Markov en temps discret de matrice $P = (p_{ij})_{i,j}$. Supposons qu'il existe un vecteur Π tel que
$$p_{ij}\Pi_i = p_{ji}\Pi_j \tag{1}$$
Montrer que Π est une solution de l'équation $\Pi = \Pi P$. En déduire que Π est proportionnel à la mesure stationnaire de la chaîne.

2. Application : on considère le graphe suivant et une personne se déplaçant aléatoirement sur ce graphe : si la personne se trouve dans un noeud ayant un degré k (*ie* k arêtes), elle en choisit une au hasard (avec probabilité $1/k$ et se déplace sur le noeud en question. On note X_n la position de la personne au temps n.
Par exemple, depuis le sommet C, on se déplace vers les sommets G, B ou D avec probabilité $1/3$.



   a) Montrer que X_n est une chaîne de Markov et donner son graphe de transition.
   b) Trouver un vecteur Π qui vérifie l'équation 1.
   c) En déduire la mesure invariante de l'exemple ci-dessus.

3. On gagne 1 euro à chaque visite d'un des trois sommets C, E et G. On définit alors la valeur v des sommets : $v(C) = v(E) = v(G) = 1$ et $v(B) = v(D) = v(F) = 0$. Calculer le gain moyen g obtenu lors d'une marche aléatoire infinie, défini par la formule suivante :
Si X_n est le n-ième sommet visité par la marche alétoire, alors
$$g = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} v(X_n).$$
Indication : on peut interpréter la mesure stationnaire du sommet i (Π_i) comme la fréquence avec laquelle la marche aléatoire passe par le sommet i.

4. À chaque pas de la marche aléatoire, le marcheur peut modifier les probabilités de la façon suivante : depuis un sommet u, il choisit un des voisins vers lequel sa probabilité d'aller est augmentée, pour devenir le double de celle des autres sommets.
Par exemple, si depuis le sommet C, il choisit de privilégier le sommet G, alors il se déplace vers le sommet G avec probabilité $2/4$ et vers les sommets B ou D avec probabilité $1/4$ chacun.

   À nouveau, on gagne 1 euro à chaque visite d'un sommet C, E et G. On cherche à maximiser l'espérance du gain après avoir visité T sommets en partant d'un sommet $s \in \{B, \dots, F\}$ (le sommet duquel on part ne compte pas comme un sommet visité).
Pour $s \in \{B, \dots, F\}$, on note $v_T(s)$ l'espérance de gain de la stratégie optimale.

a) Quelle relation lie les valeurs $v_T(s)$ et les valeurs $v_{T+1}(s')$ (pour $s, s' \in \{A, B, \ldots, H\}$) ?

b) Calculer et écrire sous forme d'un tableau bi-dimensionnel les valeurs de $v_T(s)$ pour $s \in \{B, \ldots, F\}$ et $t \in \{1, 2, \ldots, 5\}$.

c) On part du sommet C à l'instant 0. Quel sommet faut-il priviligier pour son premier pas et quelle est alors l'espérance du gain lorsque :

   i – $T = 2$

   ii – $T = 4$

   iii – $T = 5$?