

**Quick du 26 novembre 2007** (Durée 1/2 heure)

Les documents ne sont pas autorisés mais les calculettes et les tables statistiques sont autorisées.

**Génération de loi continue**

On dispose d'un générateur aléatoire noté  $\text{random}()$  à valeur réelle dans l'intervalle  $[0, 1[$ . On supposera que la séquence des appels successifs à cette fonction est modélisée par une séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur  $[0, 1[$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire dont la densité  $f$  est définie sur  $[0, 1[$  par

$$f(x) = \frac{\beta}{\sqrt{x}}.$$

**Question 1.1** : Propriétés de la loi

Calculer la valeur de  $\beta$ .

Calculer la moyenne et la variance de  $X$ .

**Question 1.2** : Simulation

Proposer un algorithme de simulation de variable aléatoire de loi de densité  $f$ .

**Tous au rapport**

Soit  $Z = \frac{U}{V}$  avec  $U$  et  $V$  variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $[0, 1[$ .

**Question 2.1** : Loi de  $Z$ 

Représenter sur un carré l'événement  $(Z \leq a)$ . En déduire la fonction de répartition de  $Z$  ainsi que sa densité.

**Question 2.2** : Espérance

Calculer  $\mathbb{E}Z$ . Commenter votre résultat.

**Question 2.3** : Loi de Cauchy

La densité d'une loi de Cauchy, définie sur  $\mathbb{R}$  est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Donner un algorithme générant une variable de loi de Cauchy.

**Mélanges d'exponentielles**

Soit

$$f(x) = \frac{3}{5}e^{-3x} + \frac{8}{5}e^{-2x}$$

une densité de probabilité.

**Question 3.1** : Algorithme

Construire un algorithme qui génère une variable aléatoire de densité  $f$ .