Fiche 2 : Simulation de lois uniformes

Génération des suites discrètes à partir d'un générateur binaire

L'objectif de cette séance est d'apprendre à produire des suites pseudo-aléatoire discrètes à partir des réalisations de générateur binaire $\texttt{ALÉA}(A)$ et générateur réel $\texttt{RANDOM}(X)$ (ici A est un entier pseudo-aléatoire dans $\{0, 1\}$ et X un réel dans $[0, 1]$).

Suites pseudo-aléatoires, $n = 32$:

A : 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0

Exercice 1

1. Proposer des algorithmes de génération d'un dé Y à 8 faces non-pipé à partir de la suite de bits ALÉA (on suppose que les variables ALÉA sont indépendantes).
2. A partir de Y générer un dé Z à 2 faces non-pipé.

Exercice 2

Soit (A_i), $i = 1, 2, ...$ une suite de variables (pseudo-)aléatoires produite par le générateur ALÉA. Notre objectif est de construire une suite des essais (Y_k) d'un dé Y à 6 faces à partir de la suite (A_i).

On considère l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} Z &= 4A_1 + 2A_2 + A_3; \\ Y &= INT\left(\frac{6}{8}Z\right). \end{aligned}$$

1. Est-ce un "bon générateur" ?
2. Proposer un autre générateur pour Y.

Soit N le nombre de tirages de ALÉA nécessaire pour sortir une valeur de Y.

1. Quelles sont les valeurs possible de N pour les algorithmes proposés ?
2. Calculer le nombre moyen de tirages de ALÉA (la complexité de l'algorithme) nécessaires pour obtenir une valeur de Y.

Génération des suites discrètes à partir d'un générateur réel

Le générateur réel $\texttt{RANDOM}(X)$ produit un réel pseudo-aléatoire dans $[0, 1]$).

Suites pseudo-aléatoires, $n = 32$:

X :	0.1934	0.6822	0.3028	0.5417	0.1509	0.6979	0.3784	0.8600
	0.8537	0.5936	0.4966	0.8998	0.8216	0.6449	0.8180	0.6602
	0.3420	0.2897	0.3412	0.5341	0.7271	0.3093	0.8385	0.5681
	0.3704	0.7027	0.5466	0.4449	0.6946	0.6213	0.7948	0.9568

Exercice 3

1. Utiliser le générateur RANDOM pour simuler le dé Z à 2 faces avec $p = P(Z = 1)$ (probabilité de pile) et $1 - p = P(Z = 0)$ (probabilité de face).
2. Soit $p = 1/2$. Donner 10 premières valeurs de Z.

Exercice 4
On considère l'algorithme suivant de génération de dé Y à 6 faces :

$$Y = INT(RANDOM * 6) + 1.$$

1. Donner les 6 premiers éléments de la suite Y_i.
2. Comment la fonction $Y = ...$ transforme l'intervalle $[0, 1]$? Vérifier si le dé Y est pipé.

Exercice 5
Parmi ces générateurs de dés, certains trichent, lesquels ?

1. `Y=INT(RANDOM*6)+1.`
2. `Y=ROUND(RANDOM*5)+1.`, `ROUND` est l'arrondi à l'entier le plus proche.
3. ```
   Y=INT(RANDOM*12)+1;
   X= (Y MOD 6) +1
   ```
4. `Y=INT(SQRT(RANDOM)*6)+1.` `SQRT` est la racine carrée.
5. ```
   REPEAT
   Y=INT(RANDOM*10)+1;
   UNTIL (Y < 7).
   ```
6. ```
   REPEAT
   Y=INT(RANDOM*11);
   UNTIL (Y PAIR);
   X = Y/2+1
   ```

Démontrer vos résultats.

Exercice 6
Déterminer la loi de la variable aléatoire X générée par les algorithmes :

1. `X=1.5*RANDOM`
2. ```
   REPEAT
   X=RANDOM;
   X=X+X;
   UNTIL (X<1.5);
   ```

Est-ce la même loi ? Si oui, comment comparer les deux algorithmes ?

Exercice 7
Déterminer la loi de la variable aléatoire X générée par les algorithmes :

1. ```
   N=INT(RANDOM*3);
   X=0;
   POUR I=0 à N faire X=X+I;
   ```
2. ```
   N=INT(RANDOM*4);
   X=INT(RANDOM*N);
   ```
3. ```
   X=0; Y=1;
   REPEAT
   X=X+1; Y=Y/2;
   UNTIL (RANDOM >Y);
   ```
   ```