Fiche 1 : Générateurs pseudo-aléatoires

L'objectif de cette fiche est d'introduire des méthodes principales de génération de nombres pseudo-aléatoires.

Exercice 1 Générateurs à base de congruences
On considére le générateur suivant :

$$x_{n+1} = ax_n \mod 7.$$

Les nombres x_n forment donc une suite de nombre pseudo-aléatoires. On cherche á évaluer le degré d'*alea* de cette suite, c'est-à-dire l'imprévisibilité (à l'observation) du prochain nombre. Lorsque cette suite est cyclique (et elle finit toujours dans un cycle), un critère important d'évaluation du générateur est la longueur du cycle observable.

1. Quelle est la longueur maximale du cycle de ce générateur ?
2. Étudier les suites produites par cet algorithme avec $a = 3$, $a = 4$ et $a = 5$.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 1 (Hull-Dobell, (1962)) *Soit la suite (x_n) produite par l'algorithme $x_{n+1} = ax_n + b \mod m$. Alors le cycle maximal est de longueur m si et seulement si les trois hypothéses suivantes sont vérifiés :*

1. *PGCD$(a, m) = 1$, PGCD$(b, m) = 1$;*
2. *si un nombre premier p divise m, alors p divise $a - 1$;*
3. *si 4 divise m, alors 4 divise $a - 1$.*

Exercice 2
Vérifier les conditions du théorème pour les valeurs
- $a = 4, b = 2, m = 9$,
- $a = 2, b = 2, m = 9$,
- $a = 3, b = 3, m = 9$,
- $a = 1, b = 1, m = 9$.

Exemple 1 : Voici quelques générateurs :

$$x_{n+1} = 7^5 x_n \mod 2^{31} - 1, \text{ (générateur IBM)}$$
$$x_{n+1} = 427419669081 x_n \mod 999999999989, \text{ (générateur Maple, 999999999989 est premier)}$$
$$x_{n+1} = 3^{15} x_n \mod 2^{32},$$
$$x_{n+1} = 3 + 2^{16} x_n \mod 2^{31},$$
$$x_{n+1} = 13^{13} x_n \mod 2^{59},$$
$$x_{n+1} = 24298 x_n + 99991 \mod 199017,$$

dont les périodes respectives sont :

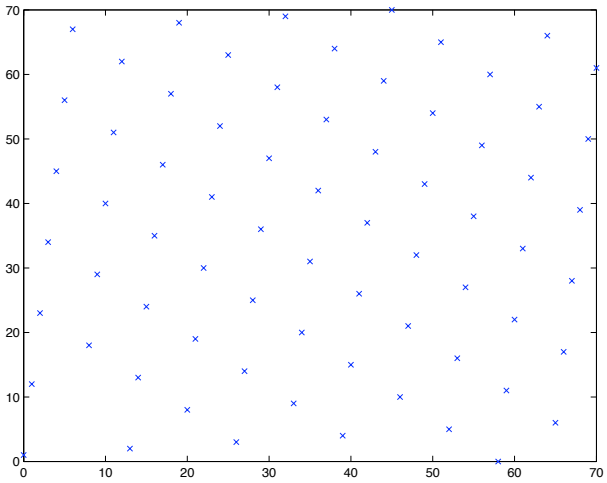
$$2^{30} = 1\,073\,741\,824,$$
$$2^{29} = 536\,870\,912,$$
$$2^{57} = 144\,115\,188\,075\,855\,872,$$
$$199\,017$$

Commentaire : Des tirages aléatoires successifs doivent être indépendants. Ce n'est évidemment pas le cas pour les générateurs pseudo-aléatoires. Un générateur pseudo-aléatoire doit toujours être utilisé avec "méfiance". Dans certains cas on peut voir apparaître le "déterminisme" de l'algorithme.

Exemple : soit le générateur

$$x_{n+1} = 11x_n + 1 \mod 71.$$

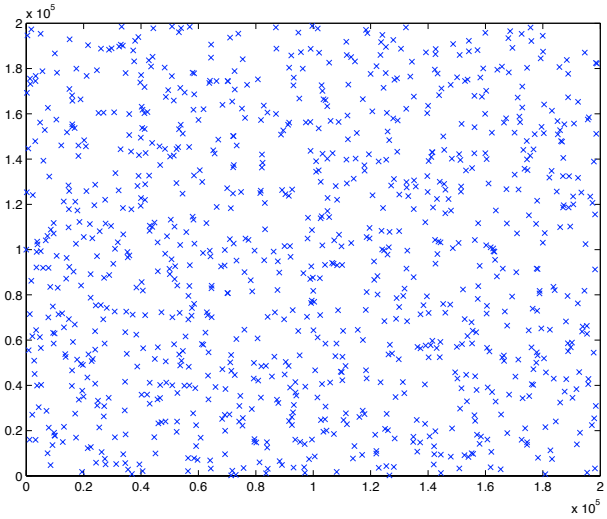
La période de ce générateur est 70. Mais que se passe-t-il si pour choisir des points aléatoires dans le plan on prend (x_{n+1}, x_n) ?



On remarque que les points sont alignés sur 2 droites.

On peut comparer cette figure avec celle pour le générateur

$$x_{n+1} = 24298x_n + 99991 \mod 199017$$



Conclusion : les propriétés du hasard sont complexes et difficiles à reproduire. "Faire au hasard" ce n'est pas "faire n'importe quoi". C'est bien dommage... pour une fois qu'on aurait pu se le permettre !

Exercice 3 Décalage de registre
Soit $S = \{1,\ 0,\ 1,\ 1\}$ la séquence binaire (le germe). Pour produire le bit suivant (S_5) de la séquence on applique

S_1 XOR S_3 ce qui donne 1 XOR $1 = 0$.

Ensuite, on décale et on recommence. On peut décrire cette récurrence par

$S_{n+1} = S_{n-1}$ XOR S_{n-3}.

1. Trouver les 5 prochains bit de la séquence. Quelle est la suite obtenue ? Est-elle bien "aléatoire" ?
2. Étudier les séquences de ce même générateur avec les germes $S = \{1,\ 0,\ 1,\ 0\}$ et $S = \{1,\ 0,\ 0,\ 1\}$.

On considére maintenant l'algorithme

$S_{n+1} = S_{n-2}$ XOR S_{n-3}.

3. étudier la séquence produite par cet algorithme. Trouver la longueur du cycle de ce générateur. Quel est le comportement de ce générateur sur les autres germes ?
4. Quelle est la longueur maximale du cycle avec un registre à 4 bits ? Quelle est la longueur minimale ? Quelle est la longueur maximale du cycle avec pour un registre de 64 bits ?

Commentaire :

Tausworthe (1965) à étudié les propriétés d'un algorithme suivant :
à partir d'un mot binaire initial (le germe) $x^0 = (x_{-m+1}, ...x_{-1}, x_0)$, on produit les éléments de la suite pseudo-aléatoire par récurrence :

$$x_{n+1} = a_1 x_{n-m+1} + a_2 x_{n-m+1} + ... + a_m x_n \mod 2$$

Dans l'exemple 1) de l'exercice précédent $m = 4$, $x_{n+1} = x_{n-3} + x_{n-1} \mod 2$ et dans l'exemple 3) $x_{n+1} = x_{n-3} + x_{n-2} \mod 2$.

Il a établi la condition sur les cœfficients a_i sous laquelle ce générateur atteint la période maximale $2^m - 1$.

Exercice 4 Génération des mots de k bits
Proposer des algorithmes de génération des mots de 3 bits. Appliquer aux séquences de l'exercice précédent.

Problème : Comment faire une bonne pièce avec une fausse...

On dispose de pièces de monnaie biaisées, c'est à dire que la fréquence d'apparition de piles ou de faces ne sont pas égales à $\frac{1}{2}$.

On modélise les tirages de ces pièces par des variables aléatoires indépendantes X_i à valeur dans $\{0, 1\}$ et on note

$p_i = \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}($ la pièce i tombe sur pile $)$.

Question 1.1 :

Calculer en fonction de p_1 et p_2 les probabilités :

$\mathbb{P}((X_1, X_2) = (0, 0))$, $\mathbb{P}((X_1, X_2) = (0, 1))$,
$\mathbb{P}((X_1, X_2) = (1, 0))$, $\mathbb{P}((X_1, X_2) = (1, 1))$.

On note Y_2 la variable aléatoire à valeur dans $\{0,1\}$ définie par $Y_2 = (X_1 + X_2)\ modulo\ 2$ (l'opération modulo 2 renvoie la valeur 1 si le nombre est impair et 0 sinon) [1].

Question 1.2 :

Calculer $\pi_2 = \mathbb{P}(Y_2 = 1)$

On suppose maintenant que $p_1 = p_2 = p$.

Question 1.3 :

Montrer que $\pi_2 - \frac{1}{2} = \left(p - \frac{1}{2}\right)(1 - 2p)$.

Question 1.4 :

Ranger par ordre croissant les 5 nombres $p, 1-p, \pi_2, 1-\pi_2, \frac{1}{2}$. On pourra supposer que $p < \frac{1}{2}$.

Question 1.5 :

En déduire de X_1 ou de Y_2 quelle serait la meilleure simulation d'une pièce non biaisée ? Justifier votre réponse.

On pose alors $Y_3 = (X_1 + X_2 + X_3)\ modulo\ 2$.

Question 1.6 :

Montrer que $Y_3 = (Y_2 + X_3)\ modulo\ 2$.

Question 1.7 :

Calculer, pour $p_1 = p_2 = p_3 = p$,

$\pi_3 = \mathbb{P}(Y_3 = 1)$

Question 1.8 :

Exprimer $\left|\pi_3 - \frac{1}{2}\right|$ en fonction de $\left|\pi_2 - \frac{1}{2}\right|$ puis de $\left|p - \frac{1}{2}\right|$.

On généralise maintenant le procédé en définissant $Y_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\ modulo\ 2$.

Question 1.9 :

Montrer que $Y_{n+1} = (Y_n + X_{n+1})\ modulo\ 2$.

Question 1.10 :

On suppose que $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$. Exprimer $\pi_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$ en fonction de π_{n-1} et p.

Question 1.11 :

Calculer dans ce cas, $\pi_n - \frac{1}{2}$ en fonction de $p - \frac{1}{2}$.

Question 1.12 :

Application : on suppose $p = 0.4$. Pour quelle valeur de n aura-t-on

$$\left|\pi_n - \frac{1}{2}\right| < 10^{-6}.$$

Commenter votre résultat.

1. Pour les fanatiques du cours d'ALM, $Y_2 = X_1\ XOR\ X_2$