

Examen du 11 mai 2004

Durée 2 heures,

Les documents sont autorisés,

Calculatrices autorisées

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la clarté de la présentation. (2 points)

Le barème est indicatif.

Modélisation

Votre petit cousin collectionne les vignettes autocollantes des footballeurs célèbres. Il achète au marchand de journaux des pochettes de 10 vignettes à un prix de 2 euros. L'album de la collection complète contient 300 places pour les vignettes autocollantes (prix d'achat de l'album 4 euros). Il souhaite savoir combien de pochettes il devra acheter pour avoir toute la collection. Saurez-vous lui répondre ?

On simplifie le modèle en supposant que l'on achète les vignettes une par une et on note T le nombre total de vignettes achetées pour avoir toute la collection. A la fin, il restera plein de doubles ! On supposera également que l'éditeur des vignettes est honnête et qu'il imprime les vignettes dans les mêmes proportions (il n'y a pas de vignettes plus rares que d'autres).

Lorsque la collection comporte déjà $i - 1$ vignettes, on note Y_i le nombre de vignettes à acheter pour avoir une vignette qui n'est pas dans la collection.

Question 1.1 : Donner, en la justifiant, la loi de Y_i . Les variables Y_i sont-elles indépendantes.

Question 1.2 : Exprimer T en fonction des Y_i . En déduire $\mathbb{E}T$ et $VarT$. Commenter votre résultat et répondre à votre petit cousin.

Simulation

On considère un espace en forme de croix (figure 1) et on souhaite générer un point P uniformément sur cet espace.

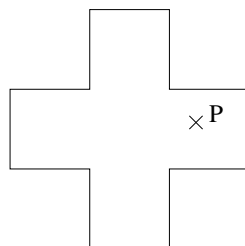


FIG. 1 – Surface du terrain

Question 2.1 : Donner, en le justifiant un algorithme de génération uniforme d'un point P sur l'espace délimité par la croix.

Question 2.2 : Donner les coordonnées des 4 premiers points générés (utiliser la table de nombres aléatoire donnée en annexe en précisant votre méthode de parcours de la table).

Question 2.3 : Calculer le coût moyen de votre algorithme et commenter votre résultat.

Dimensionnement

Question 3.1 : Soit N variable aléatoire à valeur dans \mathbb{N}^+ . Soit $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeur dans \mathbb{R}^+ , indépendantes, de même loi et indépendantes de N . On note

$$W = \sum_{n=1}^N S_n$$

Montrer que (égalité de Wald)

$$\mathbb{E}W = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}S$$

Question 3.2 : On note $G_N(x) = \mathbb{E}x^N$ la série génératrice de N , $\mathcal{L}_S(t) = \mathbb{E}e^{-tS}$ la transformée de Laplace de S et $\mathcal{L}_W(t) = \mathbb{E}e^{-tW}$ la transformée de Laplace de W . Montrer que

$$\mathcal{L}_W(t) = G_N(\mathcal{L}_S(t))$$

Dans un système de communication, les messages envoyés à un site sont stockés dans la boîte aux lettres de réception du site. Un processus consulte à intervalles de temps réguliers la boîte aux lettres et la vide de son contenu. La difficulté est de fixer la taille de la boîte aux lettres C de manière à ce que la probabilité de perdre un message par manque de place dans la boîte soit inférieure à ϵ .

On suppose que le nombre N de messages reçus dans un intervalle de temps séparant deux consultations de la boîte suit une loi géométrique de paramètre p , c'est à dire $\mathbb{P}(N = n) = (1 - p)p^{n-1}$ et que la taille d'un message suit une loi exponentielle de paramètre μ .

Question 3.3 : Calculer la taille moyenne de l'espace qui serait occupé par les messages arrivant sur un intervalle de temps.

Question 3.4 : Calculer la probabilité qu'il y ait un dépassement de la capacité C entre 2 consultations de la boîte.

Question 3.5 : Pour les valeurs $p = 0,9$, $\mathbb{E}S = 30$ Ko et $\epsilon = 10^{-5}$, calculer la capacité minimale de la boîte. Commenter votre résultat.

Annexe : Réels (float) pseudo-aléatoires

```
0.327010 0.057128 0.994553 0.214157 0.825574 0.795653 0.068671 0.667426 0.755272 0.461837
0.788446 0.411315 0.905150 0.781532 0.794132 0.095405 0.647180 0.548351 0.271737 0.638842
0.723094 0.464648 0.332958 0.886690 0.764691 0.604677 0.390348 0.213932 0.135788 0.528952
0.155550 0.462798 0.586080 0.150103 0.676956 0.411654 0.945757 0.745627 0.079080 0.701028
0.207464 0.867526 0.112343 0.112614 0.649058 0.906475 0.208019 0.296238 0.454826 0.479756
0.935080 0.177919 0.944403 0.268038 0.064609 0.709094 0.872715 0.454958 0.923026 0.008503
0.983909 0.078576 0.471301 0.569990 0.228680 0.148257 0.981644 0.174436 0.893884 0.060724
0.875465 0.101348 0.928250 0.987808 0.213961 0.577309 0.894283 0.421980 0.873546 0.349109
0.901736 0.808627 0.527028 0.846139 0.076665 0.591637 0.555233 0.949380 0.046595 0.478259
0.957883 0.030504 0.556835 0.429184 0.600494 0.785515 0.577441 0.582138 0.959951 0.471325
```