

Objets combinatoires

Magistère L2 - Semestre 4

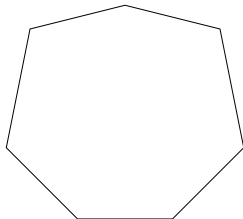
Roland Bacher ¹ et Jean-Marc Vincent ²

¹Institut Fourier ²Laboratoire d'Informatique de Grenoble

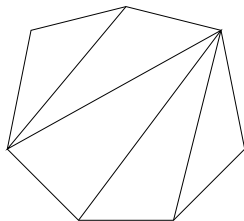
2 septembre 2011

Les nombres de Catalan

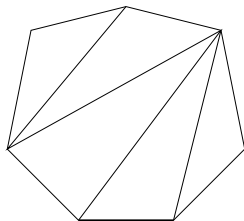
Commençons par un polygone avec 7 côtés (un heptagone):



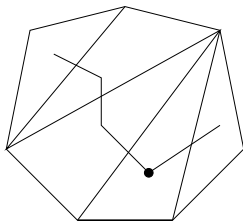
Les nombres de Catalan



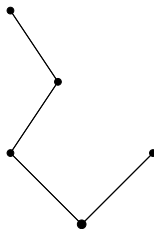
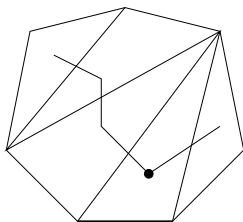
Les nombres de Catalan



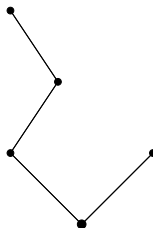
Les nombres de Catalan



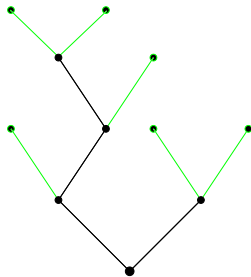
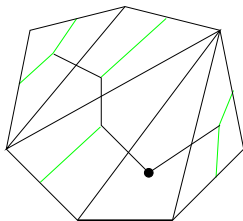
Les nombres de Catalan



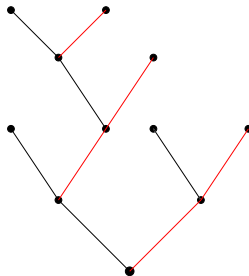
Les nombres de Catalan



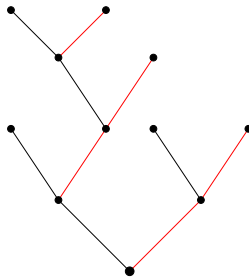
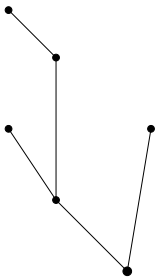
Les nombres de Catalan



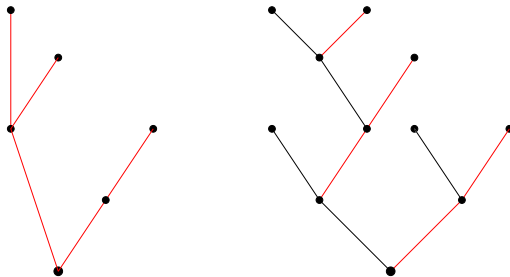
Les nombres de Catalan



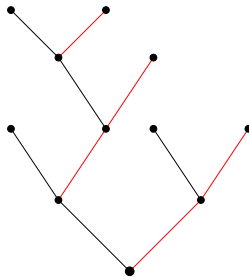
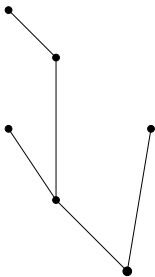
Les nombres de Catalan



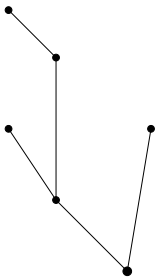
Les nombres de Catalan



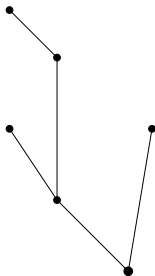
Les nombres de Catalan



Les nombres de Catalan



Les nombres de Catalan



e e r e e r r e r

Les nombres de Catalan

e e r e e r r r e r

Les nombres de Catalan

e e r e e r r r e r

((((()))) ()

Les nombres de Catalan

e e r e e r r r e r

((((()))) ()



Les nombres de Catalan

Les ensembles suivants ont le même nombre d'éléments:

- Triangulations d'un heptagone (7 côtés) convexe.
- Arbres binaires enracinés avec 5 sommets (noeuds).
- Arbres binaires réguliers enracinés avec 11 sommets.
- Arbres plans enracinés avec 6 sommets.
- Parenthésages avec 5 paires de parenthèses.
- Domaines de ski (simplifiés) avec 5 remonte-pentes et 5 pistes, tous de pente 1 et de même longueur ("mots de Dyck").

Combien ?

42

Les nombres de Catalan

Les ensembles suivants ont le même nombre d'éléments:

- Triangulations d'un heptagone (7 côtés) convexe.
- Arbres binaires enracinés avec 5 sommets (noeuds).
- Arbres binaires réguliers enracinés avec 11 sommets.
- Arbres plans enracinés avec 6 sommets.
- Parenthésages avec 5 paires de parenthèses.
- Domaines de ski (simplifiés) avec 5 remonte-pentes et 5 pistes, tous de pente 1 et de même longueur ("mots de Dyck").

Combien ?

42

Les nombres de Catalan

Les ensembles suivants ont le même nombre d'éléments:

- Triangulations d'un heptagone (7 côtés) convexe.
- Arbres binaires enracinés avec 5 sommets (noeuds).
- Arbres binaires réguliers enracinés avec 11 sommets.
- Arbres plans enracinés avec 6 sommets.
- Parenthésages avec 5 paires de parenthèses.
- Domaines de ski (simplifiés) avec 5 remonte-pentes et 5 pistes, tous de pente 1 et de même longueur ("mots de Dyck").

Combien ?

42

Problématique

Mathématiques

Énumérer les ensembles de certaines familles d'ensembles finies (peut-être selon des critères plus fins, exemple: domaines skiables selon la hauteur du plus haut sommet), questions d'asymptotique etc.

Informatique

Générer tous les éléments d'un tel ensemble fini. Tirer au hasard un élément d'un tel ensemble etc.

Problématique

Mathématiques

Énumérer les ensembles de certaines familles d'ensembles finies (peut-être selon des critères plus fins, exemple: domaines skiables selon la hauteur du plus haut sommet), questions d'asymptotique etc.

Informatique

Générer tous les éléments d'un tel ensemble fini. Tirer au hasard un élément d'un tel ensemble etc.

Problématique

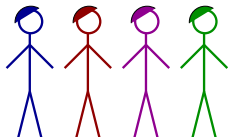
Une problématique qui traverse tous les domaines scientifiques

- **Mathématique** : Problèmes de classification, combinatoire énumérative, probabilités etc.
- **Informatique** : Structures de données, analyse d'algorithmes, arbres de décisions, théorie de l'information, apprentissage etc.
- **Biologie** : taxonomie (arbres phylogénétiques), génome, réseaux trophiques etc.
- **Physique** : physique statistique, systèmes de particules, fonctions de partition etc.
- etc.

Quelques problèmes

Le groupe des 50 vénérables vieillards du village décide d'aller picoler le samedi soir. Ils arrivent sobres et avec des bérets tricotés amoureusement par leurs femmes. Ils repartent complètement ronds et avec des bérets piochés au hasard.

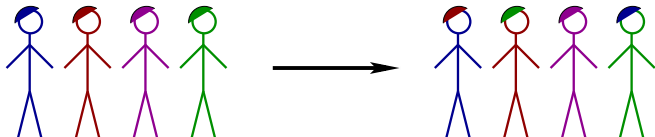
Combien de vénérables vieillards (en moyenne) sont rentrés avec leur propre béret (et n'ont donc pas un œil au beurre noir le lendemain) ?



Quelques problèmes

Le groupe des 50 vénérables vieillards du village décide d'aller picoler le samedi soir. Ils arrivent sobres et avec des bérets tricotés amoureuxment par leurs femmes. Ils repartent complètement ronds et avec des bérets piochés au hasard.

Combien de vénérables vieillards (en moyenne) sont rentrés avec leur propre béret (et n'ont donc pas un œil au beurre noir le lendemain) ?

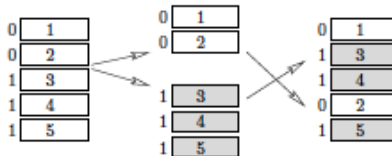


Quelques problèmes

Combien de fois faut-il battre un jeu de cartes pour que le jeu soit “bien mélangé”?



Mélange à l'américaine



Proofs from the Book Aigner and Ziegler, Springer 2010

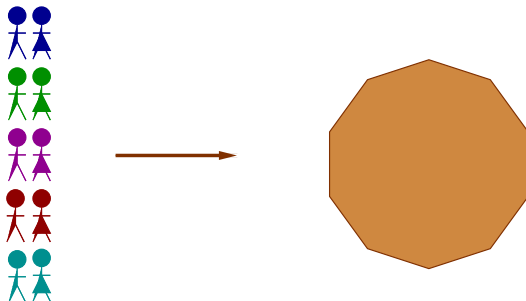
Quelques problèmes

Combien y-a-t-il de grilles de Sudoku complètement remplies ?

6	1	5	4	9	3	7	2	8
2	3	7	5	8	6	9	1	4
9	4	8	7	1	2	3	6	5
7	5	6	2	4	8	1	3	9
3	8	4	1	7	9	6	5	2
1	2	9	6	3	5	4	8	7
5	9	2	3	6	4	8	7	1
8	7	3	9	5	1	2	4	6
4	6	1	8	2	7	5	9	3

Quelques problèmes

De combien de façons peut-on placer 5 couples autour d'une table avec 10 chaises en alternant hommes et femmes et en évitant d'asseoir deux conjoints côte à côte ?



Quelques problèmes

De combien de façons peut-on placer 5 couples autour d'une table avec 10 chaises en alternant hommes et femmes et en évitant d'asseoir deux conjoints côte à côte ?

