Problèmes et Complexité

Jean-Marc Vincent[1]

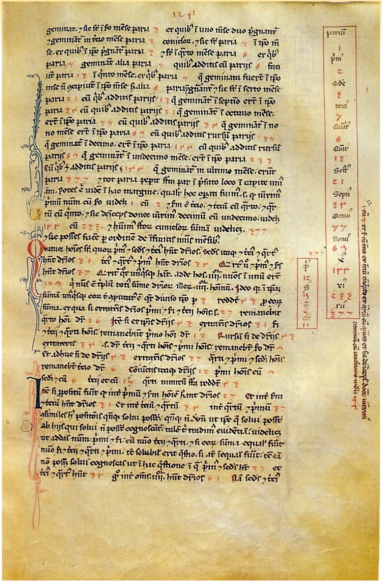
[1] Laboratoire LIG
Équipe-Projet MESCAL
Jean-Marc.Vincent@imag.fr

2016

Les lapins de Fibonnacci (1170-1250)

Leonardo Pisano dit Fibonnaci rédige le *Liber abaci* vers 1202

Possédant initialement un couple de lapins, combien de couples obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?



Les lapins de Fibonnacci (suite)

$F_n =$ population de couples de lapins au n-ième mois

$F_0 = F_1 = 1$ Condition initiale

$F_2 = 2$

$F_3 = 3$

$F_4 = 5$

$\vdots$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$\vdots$

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765,$

$10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040,$

$1346269, 2178309, 3524578, 5702887, 9227465, 14930352, 24157817, \cdots$

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

Les lapins de Fibonnacci (suite)

Le calcul de F_n

FIBO (n)
Data: n entier
Result: F_n n-ième nombre de Fibonnacci

if $n = 0$ **ou** $n = 1$ **then**
  return (1)
else
  return (FIBO (n-1)+FIBO (n-2))

Complexité en nombre d'opérations $+$ notée $C(n)$

$$C(n) = C(n-1) + C(n-2) + 1$$

$$C(0) = C(1) = 0$$

Ordre de grandeur ?

0,0,1,2,4,7,12,19,31,...

Les lapins de Fibonnacci (suite)

Le calcul de F_n

FIBO (n)
Data: n entier
Result: F_n n-ième nombre de Fibonnacci

if $n = 0$ **ou** $n = 1$ **then**
  return (1)
else
  return (FIBO (n-1)+FIBO (n-2))

Complexité en nombre d'opérations $+$ notée $C(n)$

$$C(n) = C(n-1) + C(n-2) + 1$$

$$C(0) = C(1) = 0$$

Ordre de grandeur ?

0,0,1,2,4,7,12,19,31,...

Les lapins de Fibonnacci (suite)

Ordre de grandeur

$$C(n) = C(n-1) + C(n-2) + 1; \quad C(0) = C(1) = 0$$

$$2C(n-2) \leqslant C(n) \leqslant 2C(n-1)$$

$$2^{n/2-1}C(2) \leqslant C(n) \leqslant 2^{n-1}C(2)$$

$$\log_2 C(n) = \Theta(n)$$

Peut-on faire mieux ?

Les lapins de Fibonnacci (suite)

Le calcul de F_n

FIBO (n)
Data: n entier
Result: F_n n-ième nombre de Fibonnacci

```
F = 1 ;                  // valeur de F_0
G = 1;                   // valeur de F_1
for i = 2 to n do
    H = F + G ;          // valeur de F_i
    F = G
    G = H
return (G)
```

Complexité en nombre d'opérations + notée $C'(n)$

$$C'(n) = n - 1 = \Theta(n)$$

Peut-on faire mieux ?

Les lapins de Fibonnacci (suite)

Le calcul de F_n

FIBO (n)
Data: n entier
Result: F_n n-ième nombre de Fibonnacci

```
F = 1 ;                         // valeur de F_0
G = 1;                          // valeur de F_1
for i = 2 to n do
    H = F + G ;                 // valeur de F_i
    F = G
    G = H
return (G)
```

Complexité en nombre d'opérations + notée $C'(n)$

$$C'(n) = n - 1 = \Theta(n)$$

Peut-on faire mieux ?

Exemple : calcul de $\underbrace{x * x * x * \cdots * x}_{n \text{ fois}}$

Puissance (itérative)

PUISSANCE (x,n)
Data: Un réel x et un entier n
Result: Le calcul de x^n

```
p = 1
for i = 1 to n do
    p = p * x
return (p)
```

Puissance (récursive)

PUISSANCE2 (x,n)
Data: Un réel x et un entier n
Result: Le calcul de x^n

```
if n = 0 then
    return (1)
else
    return (x*PUISSANCE2 (x,n − 1))
```

Coût en nombre d'opérations $*$ = n

Coût en espace mémoire = 4 (entiers)

Coût variable, dépend de la valeur des données

Taille des données en entrée : n (en fait $\log_2(n)$)

Peut-on faire mieux ?

Exemple : calcul de $\underbrace{x * x * x * \cdots * x}_{n \text{ fois}}$ (2)

Un principe Diviser pour régner

```
PUISSANCE-DIV(x,n)
 Data: Un objet x et un entier n positif
 Result: La valeur de x^n

if n = 1 then                                   // cas de base
    return x
else                                            // récursion
    if n pair then
        z = PUISSANCE-DIV(x,n/2)
        return z ⋆ z
    else                                        // n est impair ⩾ 3
        z = PUISSANCE-DIV(x,(n − 1)/2)
        return z ⋆ z ⋆ x
```

Coût de l'algorithme : $\mathcal{O}(\log n)$

Peut-on faire mieux ?

Exemple : calcul de $\underbrace{x * x * x * \cdots * x}_{n \text{ fois}}$ (3)

Comme le nombre de façons de calculer x^n est fini. On peut construire l'*arbre des puissances*

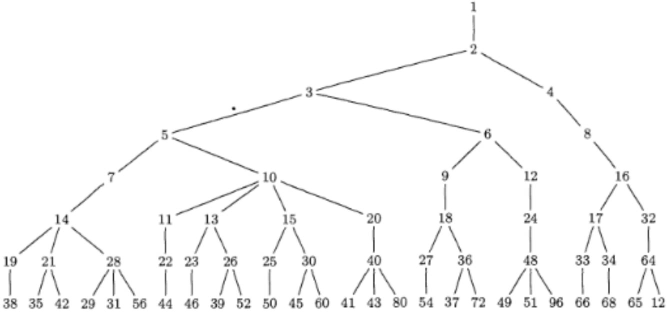


Fig. 14. The "power tree."

The Art of Computer Programming : Semi-Numerical Algorithms (vol 2) p464
Pour calculer par exemple x^{29} on calcule x^2, x^3, x^5, x^7, x^{14}, x^{28} et x^{29}.

Exemple : calcul de $\underbrace{x * x * x * \cdots * x}_{n \text{ fois}}$ (4)

Un algorithme itératif (dérécursification)

The same idea applies, in general, to any value of n, in the following way: Write n in the binary number system (suppressing zeros at the left). Then replace each "1" by the pair of letters SX, replace each "0" by S, and cross off the "SX" that now appears at the left. The result is a rule for computing x^n, if "S" is interpreted as the operation of *squaring*, and if "X" is interpreted as the operation of *multiplying by* x. For example, if $n = 23$, its binary representation is 10111; so we form the sequence SX S SX SX SX and remove the leading SX to obtain the rule SSXSXSX. This rule states that we should "square, square, multiply by x, square, multiply by x, square, and multiply by x"; in other words, we should successively compute x^2, x^4, x^5, x^{10}, x^{11}, x^{22}, x^{23}.

This binary method is easily justified by a consideration of the sequence of exponents in the calculation: If we reinterpret "S" as the operation of multiplying by 2 and "X" as the operation of adding 1, and if we start with 1 instead of x, the rule will lead to a computation of n because of the properties of the binary number system. The method is quite ancient; it appeared before 200 B.C. in Piṅgala's Hindu classic *Chandaḥ-sûtra* [see B. Datta and A. N. Singh, *History of Hindu Mathematics* **2** (Lahore: Motilal Banarsi Das, 1935), 76]. There seem to be no other references to this method outside of India during the next 1000 years, but a clear discussion of how to compute 2^n efficiently for arbitrary n was given by al-Uqlīdisī of Damascus in A.D. 952; see *The Arithmetic of al-Uqlīdisī* by A. S. Saidan (Dordrecht: D. Reidel, 1975), 341–342, where the general ideas are illustrated for $n = 51$. See also al-Bīrūnī's *Chronology of Ancient Nations*, edited and translated by E. Sachau (London: 1879), 132–136; this eleventh-century Arabic work had great influence.

The Art of Computer Programming : Semi-Numerical Algorithms (vol 2) p461

Donald E. Knuth

- The Art of Computer Programming (1962-73,2005)
- Combinatoire et Analyse d'algorithmes
- Litterate Programming (1992)
- TEXet Metafont
- Turing award 1974
- Langage Mix
- Algorithmes ...

Biographie de Donald E. Knuth *Mactutor History*

Exemple : calcul de $\underbrace{x * x * x * \cdots * x}_{n \text{ fois}}$ (4)

Un principe **Décomposition du problème**

PUISSANCE-FACT(x,n)
Data: Un objet x et un entier n positif
Result: La valeur de x^n

```
if n = 1 then                                   // cas de base
    retourner x
else                                            // récursion
    if n est premier then
        z = PUISSANCE-FACT(x, n − 1)
        retourner x ⋆ z
    else                                        // n est composé n = p × q
        y = PUISSANCE-FACT(x, p)
        z = PUISSANCE-FACT(y, q)
        retourner z
```

Coût de l'algorithme : ?

Peut-on faire mieux ?

Exemple : calcul de $\underbrace{x * x * x * \cdots * x}_{n \text{ fois}}$ (5)

Théorème

La complexité du problème du calcul de la puissance est $\Theta(\log n)$.

- Il existe un algorithme de coût $\mathcal{O}(\log n)$ donc la complexité du problème est inférieure à $\mathcal{O}(\log n)$;
- En effet, montrons par récurrence la propriété *le coût minimal d'un algorithme de calcul de* x^n *est minoré par* $\log_2 n$.
  - Cette propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.
  - Supposons la propriété vraie pour tout $1 \leqslant i \leqslant n - 1$ et considérons l'algorithme optimal qui calcule x^n (il existe car il existe un nombre fini de manières de calculer x^n).
    Cet algorithme effectue uniquement des opérations $*$.
    La dernière exécution fait le produit $x^k * x^{n-k}$ pour une valeur de k que l'on peut choisir supérieure à $\frac{n}{2}$ (entre k et $n - k$ l'un des 2 est plus grand que $\frac{n}{2}$).
    D'après l'hypothèse de récurrence le calcul de x^k demande au moins $\log_2 k$ opérations, c'est à dire au moins $\log_2 \frac{n}{2} = \log_2 n - 1$.
    Donc le nombre d'opérations d'un algorithme optimal est minoré par $(\log_2 n - 1) + 1 = \log_2 n$.

Quelle moralité tirer du théorème ci-dessus ?

Complexité d'un problème

Etant donné un problème $\mathcal{P}$, on appelle **complexité** du problème $\mathcal{P}$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(n) = \min_{A} \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(n)$$

avec A algorithme qui résout $\mathcal{P}$
$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(n)$: la complexité au pire de l'algorithme A sur une instance de taille n

- La complexité d'un algorithme est un majorant le la complexité du problème qu'il résout
- plus difficile à calculer : ordres de grandeur, minorants, majorants
- le coût d'un algorithme particulier sur des donnés particulières ne donne aucune information sur la complexité du problème
- référence à une machine : coût des opérations

Problèmes classiques

- Recherche d'un élément dans un tableau de taille n (nombre de tests d'égalité) :

  $\mathcal{O}(n)$ parcours de l'ensemble
- Recherche d'un élément dans un tableau ordonné de taille n (nombre de comparaisons) :

  $\mathcal{O}(\log n)$ (recherche dichotomique)
- Calcul de x^n (nombre de multiplications) :

  $\mathcal{O}(\log n)$ (diviser pour régner)
- Tri d'un tableau (nombre de comparaisons) :

  $\mathcal{O}(n \log n)$ Heap-sort, Merge-sort...

Complexité du problème du tri

- **Problème :** Etant donné une suite d'éléments $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ dans un ensemble *ordonné* donner une permutation σ des indices telle que $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots x_{\sigma(n)})$ soit ordonnée
- **Mesure de coût :** nombre de comparaisons
- **Borne supérieure :** Il existe des algorithmes de tri de complexité $\mathcal{O}(n \log n)$
- **Borne inférieure :** (hypothèse : les éléments sont différents)
  - La réponse est unique
  - Le nombre de permutations est $n!$
  - L'algorithme code une permutation
  - Il faut $\log_2 n!$ bits pour coder sans ambiguïté les $n!$ permutations
  - $\log_2 n! = \mathcal{O}(n \log n)$

et les lapins de Fibonnacci...

Quelle est la complexité du calcul de F_n ?

$F_n =$ population de couples de lapins au n-ième mois

$F_0 = F_1 = 1$ Condition initiale

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

C'est le calcul de puissance Youpi !

et les lapins de Fibonnacci...

Quelle est la complexité du calcul de F_n ?

$F_n =$ population de couples de lapins au n-ième mois

$F_0 = F_1 = 1$ Condition initiale

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

C'est le calcul de puissance Youpi !

et les lapins de Fibonnacci...

Quelle est la complexité du calcul de F_n ?

$F_n =$ population de couples de lapins au n-ième mois

$F_0 = F_1 = 1$ Condition initiale

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

C'est le calcul de puissance Youpi !

et les lapins de Fibonnacci...

Quelle est la complexité du calcul de F_n ?

$F_n =$ population de couples de lapins au n-ième mois

$F_0 = F_1 = 1$ Condition initiale

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

C'est le calcul de puissance

Youpi !

et les lapins de Fibonnacci...

Quelle est la complexité du calcul de F_n ?

$F_n =$ population de couples de lapins au n-ième mois

$F_0 = F_1 = 1$ Condition initiale

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

C'est le calcul de puissance

Youpi !