Génération de variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 Inverse de la fonction de répartition
Soit X variable aléatoire de fonction de répartition F.

1. Montrer que si F est continue et strictement monotone alors F est inversible. On note F^{-1} la fonction réciproque de F.
2. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$. Montrer que $F^{-1}(U)$ a la même loi que X.
3. En déduire un algorithme de génération pour X :
   (a) de loi uniforme sur $[a,b[$;
   (b) de loi exponentielle de paramètre λ ;
   (c) de loi de Weibull de fonction de répartition $F(x) = \left(1 - exp(-\alpha x^{\beta})\right) \mathbb{1}_{(x \geqslant 0)}$.

Si F n'est pas strictement monotone ou n'est pas continue on généralise la notion de fonction inverse par

$$F^{-1}(u) = \sup\{x \in \mathbb{R} \;/\; F(x) < u\}.$$

1. Montrer que pour U de loi uniforme sur $[0,1[$, $F^{-1}(U)$ a la même loi que X.
2. Retrouver le résultat obtenu en cours pour les lois discrètes (loi de Bernoulli, géométrique,...).

Exercice 2 Méthode de rejet
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F, et dont les valeurs sont dans l'intervalle $[a,b]$. On note f sa densité et F sa fonction de répartition. On supposera qu'il existe un majorant h de f sur l'intervalle $[a,b]$.

```
repeter
   x= uniform(a,b); /* genere une variable aleatoire uniforme sur [a,b[ */
   y= uniform(0,1)*h ;
jusqu'a (y <= f(x));
return x
```

1. Faire un ou des dessins.
2. Montrer que la valeur générée est distribuée selon la densité f.
3. Quelle est la complexité de cet algorithme en nombre de passages dans la boucle ? Quelle est la "meilleure" valeur de h ?
4. Donner sur des dessins des exemples ou la complexité est faible, importante.
5. Utiliser cette méthode pour générer une variable aléatoire de densité
   (a) $f(x) = 2x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$;
   (b) $f(x) = \frac{\pi}{2} sin(\pi x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$;
   (c) $f(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.
6. Soit f une fonction de densité d'une variable aléatoire X que l'on sait générer par un algorithme. Montrer que l'algorithme suivant génère un point distribué uniformément sur la surface définie entre la courbe f et l'axe des abscisses.

```
X = genere_X()   /* genere un échantillon de X */
Y= uniform(0,1)*f(X);
return M=(X,Y);
```

7. Soit X de densité f. On suppose qu'il existe g une densité et un coefficient h tel que pour tout x, $f(x) \leqslant h * g(x)$. On suppose également que l'on est capable de générer une variable aléatoire Y de densité g. Montrer que l'algorithme suivant génère une variable aléatoire de densité f.

```
repeter
   x= genere_Y();  /* genere une variable aleatoire de densite g  */
   y= uniform(0,1)*h*g(x) ;
jusqu'a (y <= f(x));
return x
```

On pourra faire un dessin.

Exercice 3 Loi triangulaire
On définit la distribution triangulaire par la densité $f(x) = x\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + (2-x)\mathbb{1}_{[1,2]}(x)$.

1. Vérifier que f est bien une densité, calculer sa fonction de répartition et en déduire un premier algorithme de simulation.
2. Proposer un algorithme de rejet pour générer cette loi et calculer son coût. Peut-on l'améliorer ?
3. Soit U, V des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1[$. Calculer la densité de $U + V$. En déduire un algorithme de simulation.
4. Comparer ces 3 algorithmes.

Exercice 4 Loi Normale
La loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ de densité $f(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$ a une fonction de répartition $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ difficile à inverser autrement que numériquement.

1. Trouver une valeur h telle que $\frac{2}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}} \leqslant h * e^{-x}$. Proposer un algorithme de génération d'une variable de densité $\frac{2}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$. En déduire un algorithme pour générer une variable de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
2. Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Quelle est la loi du couple (X, Y) ? Par passage en coordonnées polaires, on note $\rho = \sqrt{X^2+Y^2}$ et $\theta = Arctan\frac{Y}{X}$. Faire un dessin.
   Donner la loi de ρ, la loi de θ. Montrer que ρ et θ sont indépendants. En déduire un algorithme de génération de loi $\mathcal{N}(0,1)$.