Quick numéro 2 (Durée $3/4$ heure)

Les documents, les calculettes et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Le barème est **purement indicatif**. La question 1.6 est **facultative** et donne lieu à des points de bonus.

1 À la dérive... (10 pts)

1.1 Radioactivité

"Chaque atome radioactif possède une durée de vie X qui suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Le paramètre λ s'appelle alors la constante de désintégration. La durée de vie moyenne $\frac{1}{\lambda}$ s'appelle le temps caractéristique. La loi des grands nombres permet de dire que la concentration d'atomes radioactifs va suivre la même loi. La médiane correspond au temps moyen T nécessaire pour que la population passe à 50% de sa population initiale et s'appelle la demi-vie ou période."

(extrait de Wikipédia).

Question 1.1 : Demi-vie

Calculer la demi-vie de l'élément radioactif en fonction de λ.

Question 1.2 : La jeunesse de Dory

Prouver que :

$$\forall t > 0, u > 0, \mathbb{P}(X > t + u | X > t) = \mathbb{P}(X > u)$$

Pourquoi dit-on que cette durée de vie est *sans vieillissement* ? (On dit aussi que l'exponentielle est *sans mémoire*.)

Question 1.3 : Unicité

Prouver qu'une loi sans mémoire est nécessairement exponentielle.

1.2 Minet Max

Question 1.4 : Fonction de répartition

Soit $X_1, ..., X_n (n \geqslant 2)$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, de fonction de répartition quelconque F. Calculer les fonctions de répartition de $Y = max(X_1, ..., X_n)$ et de $Z = min(X_1, ..., X_n)$

Question 1.5 : Application

Calculer la densité de probabilité de Z lorsque $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Quelle est cette loi ?

Question 1.6 : Éclairage **(bonus)**

Une salle de classe est éclairée par 4 néons ayant une durée de vie de loi exponentielle, de moyenne 10 ans. Au bout de combien de temps en moyenne la classe sera-t-elle plongée dans l'obscurité ?

Question 1.7 : Connexions

Le temps entre 2 visites sur le site internet de l'UFR de maths suit une loi exponentielle de moyenne 1h. À l'UFR d'informatique, même loi mais de moyenne 1h30. Lorsqu'on fusionne les deux UFR, que devient la loi du temps séparant 2 visites consécutives sur le nouveau site web ?

1.3 Analogie discrète

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, et soit un réel $\alpha > 0$. On pose $W = \lceil \alpha X \rceil$. (On rappelle que $\lceil u \rceil$ dénote la partie entière supérieure de u, i.e. $\min_{k \in \mathbb{N}, k > u}$.)

Question 1.8 :

Montrer que W suit la loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}$.

1.4 Autres lois

Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{-2x} + \frac{1}{2} \times 3e^{-3x}$. On cherche à simuler cette variable aléatoire avec la fonction random (loi uniforme sur $]0,1[$).

Question 1.9 :

Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}(]0,1[)$. Montrer que la variable

$$Z = \mathbb{1}_{\{U_1 < \frac{1}{2}\}} \left(-\frac{1}{2} \log(U_2) \right) + \mathbb{1}_{\{U_1 < \frac{1}{2}\}} \left(-\frac{1}{3} \log(U_2) \right)$$

admet f comme densité de probabilité. (On rappelle que la fonction indicatrice vaut $\mathbb{1}_{\{A\}} = 1$ si A est vrai, $\mathbb{1}_{\{A\}} = 0$ sinon).

Question 1.10 : Simulation

En déduire un algorithme de simulation.

2 Générateur mystère (5 pts)

Soit l'algorithme de simulation suivant :

répéter
  $X \leftarrow$ `random()`;
  $X \leftarrow X + X$;
jusqu'à $X < 1.6$
retourne X

Question 2.1 : Mise en œuvre

Déterminer les 5 premières valeurs retournées par l'algorithme.

Question 2.2 : Enquête

Déterminer la loi simulée et le coût de l'algorithme.

3 Multiplexage statistique (5 pts)

Une entreprise a décidé d'investir dans un nouveau logiciel scientifique, performant mais coûteux. L'administrateur système souhaite donc calculer le nombre de licences réellement nécessaires. L'entreprise emploie 200 ingénieurs concernés. Des mesures préliminaires avec la version de test suggèrent que les utilisateurs utilisent le logiciel environ 10% de leur temps, de façon indépendante.

Question 2.3 : Modélisation

Modéliser les accès des utilisateurs et calculer la loi du nombre d'utilisateurs simultanés.

Question 2.4 : TCL

Si l'entreprise achète 30 licences, quelle est la probabilité qu'un ingénieur trouve tous les jetons occupés alors qu'il en a besoin ?

Annexe : Réels pseudo-aléatoires indépendants et uniformément distribués sur $[0,1[$

Indiquer, pour chaque utilisation, le parcours effectué de la table

0.327010	0.057128	0.994553	0.214157	0.825574	0.795653	0.068671	0.667426	0.755272	0.461837
0.788446	0.411315	0.905150	0.781532	0.794132	0.095405	0.647180	0.548351	0.271737	0.638842
0.723094	0.464648	0.332958	0.886690	0.764691	0.604677	0.390348	0.213932	0.135788	0.528952
0.155550	0.462798	0.586080	0.150103	0.676956	0.411654	0.945757	0.745627	0.079080	0.701028
0.207464	0.867526	0.112343	0.112614	0.649058	0.906475	0.208019	0.296238	0.454826	0.479756
0.935080	0.177919	0.944403	0.268038	0.064609	0.709094	0.872715	0.454958	0.923026	0.008503
0.983909	0.078576	0.471301	0.569990	0.228680	0.148257	0.981644	0.174436	0.893884	0.060724
0.875465	0.101348	0.928250	0.987808	0.213961	0.577309	0.894283	0.421980	0.873546	0.349109
0.901736	0.808627	0.527028	0.846139	0.076665	0.591637	0.555233	0.949380	0.046595	0.478259
0.957883	0.030504	0.556835	0.429184	0.600494	0.785515	0.577441	0.582138	0.959951	0.471325