

Quick du 2 Novembre 2010 (Durée 1 heure)

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Le barème est indicatif.

Modélisation : jeu de pièces (~ 4 points)

On dispose de trois pièces biaisées chaque face de la pièce rapporte un certain score dépendant de la pièce. Chacun des 2 joueurs choisit l'une de trois pièces et lance sa pièce, la pièce affichant le plus fort score remporte la mise de 1500 euros.

Pièce	\mathcal{P}_1	\mathcal{P}_2	\mathcal{P}_3
Probabilité de pile	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
Score pile	10	4	3
Score face	2	4	20

Question 1.1 : Modélisation

Proposer une modélisation de ce jeu.

Question 1.2 : Stratégie

Votre adversaire propose de choisir sa pièce en premier. Etes-vous d'accord ?

Loi géométrique (~ 2 points)

Soit X_1 et X_2 variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètres respectifs p_1 et p_2 , c'est à dire $\mathbb{P}(X_i = k) = p_i(1 - p_i)^k$ avec $i = 1$ ou 2 .

Question 2.1 :

Expliquer pourquoi $X = \min(X_1, X_2)$ suit une loi géométrique de paramètre p que l'on calculera en fonction de p_1 et p_2

Générateur particulier (~ 8 points)

On considère le générateur suivant :

$U = \text{Random}()$;

$X = 0$;

répéter

$X = X + 1$;

jusqu'à $\text{Random}() < U$

Retourne X ;

Question 3.1 : Exemple

Donner les 4 premières valeurs retournées par l'algorithme à partir de la table de nombres aléatoires donnée en annexe.

Question 3.2 : Analyse

Quelle est la loi de la valeur retournée X ? Quel est le coût moyen de cette génération ?

Indication : calculer dans un premier temps $\mathbb{P}(X = k|U = u)$ la loi de X sachant que le tirage de U vaut u

Question 3.3 : Autre algorithme

Proposer un autre algorithme de génération. Est-il plus efficace ?

Génération de graphe (~ 6 points)**Question 4.1 :** Algorithme de génération

Proposer un algorithme de génération uniforme de graphe non orienté sans boucles ayant n sommets.

Question 4.2 : Exemple

Générer 3 graphes de taille 3 avec votre algorithme en utilisant la table de nombre aléatoires donnée en annexe.

Question 4.3 : Preuve

Prouver que votre algorithme génère bien un graphe selon la loi uniforme.

Annexe : Réels pseudo-aléatoires indépendants et uniformément distribués sur $[0, 1[$

Indiquer pour chaque utilisation le parcours effectué de la table

0.327010	0.057128	0.994553	0.214157	0.825574	0.795653	0.068671	0.667426	0.755272	0.461837
0.788446	0.411315	0.905150	0.781532	0.794132	0.095405	0.647180	0.548351	0.271737	0.638842
0.723094	0.464648	0.332958	0.886690	0.764691	0.604677	0.390348	0.213932	0.135788	0.528952
0.155550	0.462798	0.586080	0.150103	0.676956	0.411654	0.945757	0.745627	0.079080	0.701028
0.207464	0.867526	0.112343	0.112614	0.649058	0.906475	0.208019	0.296238	0.454826	0.479756
0.935080	0.177919	0.944403	0.268038	0.064609	0.709094	0.872715	0.454958	0.923026	0.008503
0.983909	0.078576	0.471301	0.569990	0.228680	0.148257	0.981644	0.174436	0.893884	0.060724
0.875465	0.101348	0.928250	0.987808	0.213961	0.577309	0.894283	0.421980	0.873546	0.349109
0.901736	0.808627	0.527028	0.846139	0.076665	0.591637	0.555233	0.949380	0.046595	0.478259
0.957883	0.030504	0.556835	0.429184	0.600494	0.785515	0.577441	0.582138	0.959951	0.471325