Quick du 21 octobre 2008 (Durée $3/4$ heure)

Les documents ne sont pas autorisés, mais les calculettes sont autorisées.

Générateur de permutation aléatoire

Requiert: T tableau de taille n indicé de 1 à n
pour $i = 1$ à $n-1$ **faire**
$j = i + INT(random() * (n - i + 1))$;
{INT(x) renvoie l'entier partie entière inférieure de x,}
{ les appels successifs à la fonction random() sont modélisés par une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1[$ }
Echange $T[i]$ et $T[j]$
fin pour
retourne T

Question 1.1 : Génération

Pour $n = 5$ et $T = [1, 2, 3, 4, 5]$ donner le tableau obtenu en utilisant la table des nombres aléatoires fournie en annexe comme générateur random.

Question 1.2 : Cas $n = 3$

Pour le tableau $T = [1, 2, 3]$ montrer que l'algorithme génère uniformément une permutation de ses éléments

Question 1.3 : Propriété

Démontrer que l'algorithme proposé génère une permutation aléatoire uniforme des éléments du tableau T.

Loi du 2$^{\text{ième}}$ pile

Requiert: p et q, $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$
$x = 0$;
répéter
$x = x + 1$
jusqu'à $(random() < p)$
répéter
$x = x + 1$
jusqu'à $(random() < q)$
retourne x

Question 2.1 : Coût de l'algorithme

Calculer le coût moyen de cet algorithme.

Question 2.2 : Calcul

Pour $p = q = \frac{1}{2}$ calculer la probabilité que l'algorithme retourne $1, 2, 3, 4$.

Question 2.3 : Loi de la variable générée cas $p = q$

Calculer la loi de la variable aléatoire générée.

Question 2.4 : Loi de la variable générée cas $p \neq q$

Calculer la loi de la variable aléatoire générée.

Loi discrète inconnue

Soit X_1 variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$ de loi $\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{\alpha_1}{k!}$.

Question 3.1 : Paramètres de la loi

Quelle est la valeur de α_1 ? Calculer la valeur la plus probable de cette loi ainsi que sa médiane. Calculer la moyenne de X.

Question 3.2 : Génération

Ecrire un algorithme de simulation selon la loi ci-dessus et faire l'analyse de son coût.

Soit X_2 variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$ de loi sur $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X_2 = k) = \alpha_2 \frac{2^k}{k!}.$$

Question 3.3 : Somme

Calculer α_2 et montrer que X_2 a la loi de la somme de 2 variables aléatoires indépendantes de même loi que X_1. En déduire un algorithme de génération pour X_2.

Question 3.4 : Généralisation

En déduire un algorithme de génération d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre n (avec $n \in \mathbb{N}$).

Annexe :Réels (float) pseudo-aléatoires

```
0.327010 0.057128 0.994553 0.214157 0.825574 0.795653 0.068671 0.667426 0.755272 0.461837
0.788446 0.411315 0.905150 0.781532 0.794132 0.095405 0.647180 0.548351 0.271737 0.638842
0.723094 0.464648 0.332958 0.886690 0.764691 0.604677 0.390348 0.213932 0.135788 0.528952
0.155550 0.462798 0.586080 0.150103 0.676956 0.411654 0.945757 0.745627 0.079080 0.701028
0.207464 0.867526 0.112343 0.112614 0.649058 0.906475 0.208019 0.296238 0.454826 0.479756
0.935080 0.177919 0.944403 0.268038 0.064609 0.709094 0.872715 0.454958 0.923026 0.008503
0.983909 0.078576 0.471301 0.569990 0.228680 0.148257 0.981644 0.174436 0.893884 0.060724
0.875465 0.101348 0.928250 0.987808 0.213961 0.577309 0.894283 0.421980 0.873546 0.349109
0.901736 0.808627 0.527028 0.846139 0.076665 0.591637 0.555233 0.949380 0.046595 0.478259
0.957883 0.030504 0.556835 0.429184 0.600494 0.785515 0.577441 0.582138 0.959951 0.471325
```