

Examen du 7 janvier 2010 (Durée 2 heure)

Les documents ne sont pas autorisés.

Il sera tenu compte de la rigueur de la rédaction et de la clarté de la présentation

Les papillotes... (merci Vincent pour les statistiques)

Les fêtes de Noël sont sources de difficultés entre les convives. En effet, les fameux paquets de papillotes fabriqués par R., "Noir majeur" contiennent des papillotes de quatre parfums différents :

- Alliance du cacao et d'éclats de crêpes dentelle en robe de chocolat noir
- Fraîcheur cacaotée dévoilée sous un chocolat noir croquant
- Harmonie du praliné noir intense et des éclats de noisettes grillées
- Praliné noir parsemé d'éclats croquants d'amandes en robe de chocolat noir

Après avoir ouvert 2 paquets, les comptages de papillotes par parfum sont ¹ :

| Couleur | nombre |
|---------|--------|
| Jaune | 17 |
| Bleu | 23 |
| Violet | 26 |
| Vert | 14 |

Question 1.1 :

Qu'en pensez-vous ?

Jouons aux dominos

Après avoir dégusté les papillotes on vous propose de jouer aux dominos (jeu classique double-six). Le jeu de domino est constitué d'un ensemble de tuiles marquées par des points, un domino étant défini par un couple (i, j) avec $0 \leq i \leq j \leq 6$. Un jeu de domino est constitué de tous les dominos différents avec les numéros de 0 à 6

Question 2.1 : Nombre de dominos

Calculer le nombre total K_6 de dominos dans un jeu double-six, puis K_n dans un jeu double- n (les marques vont de 0 à n)

Question 2.2 : Générateur de domino

Ecrire un algorithme de génération uniforme de domino. Chaque domino à la probabilité $\frac{1}{K_6}$ d'être généré. Prouver votre algorithme.

Question 2.3 : Coût de la génération

Calculer le coût de votre algorithme (et des opérations de précalcul éventuelles).

Question 2.4 : Génération uniforme d'un domino de jeu double n

A partir de l'équation de récurrence des K_n que l'on détaillera, écrire un algorithme qui, à partir de n génère uniformément un domino du jeu double- n .

Dans de nombreux pays le jeu de domino se joue à 4 et tous les dominos sont distribués en début de partie.

Question 2.5 : Génération d'une distribution des K_n dominos (question indépendante des 3 questions précédentes)

Ecrire un algorithme qui génère uniformément une distribution des dominos du jeu double-6. Prouver votre algorithme.

¹j'ai légèrement modifié les mesures réelles afin de faciliter les calculs

Générateur inconnu

On considère l'algorithme suivant :

```
{ Les appels successifs à la fonction random renvoient une séquence de nombres réels indépendants et uniformément distribués sur  $[0, 1[$  . }  
 $U \leftarrow \text{random}()$  ;  
 $V \leftarrow \text{random}()$  ;  
 $X \leftarrow \frac{U}{V}$   
retourner  $X$ 
```

Question 3.1 : Fonction de répartition

Calculer $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. *Indication* : On distinguera les cas $0 \leq x \leq 1$ et $1 \leq x$.

Question 3.2 : Densité

Calculer la densité de la variable aléatoire X retournée, sa moyenne et sa variance. Commenter votre résultat.

Question 3.3 : Autre générateur

Proposer un autre algorithme de génération ne faisant qu'un seul appel à la fonction `random`.

A ne surtout pas faire pour valider votre analyse probabiliste...

Joe et Bill jouent à la roulette russe avec un pistolet à 6 coups qui contient une seule balle. On fait tourner le barillet une seule fois au début du jeu. Soit N la durée du jeu.

Question 4.1 :

Déterminer la loi de N et son espérance.

Joe joue le premier.

Question 4.2 :

Quelle est la probabilité que Joe meure le premier. Joe a-t-il réellement intérêt à débiter le jeu ?

Question 4.3 :

On fait tourner le barillet avant chaque essai. Mêmes questions.