Examen du 6 janvier 2009 (Durée 2 heure)

Les documents ne sont pas autorisés mais les calculettes et les tables statistiques sont autorisées.
Il sera tenu compte de la rigueur de la rédaction et de la clarté de la présentation

L'enfer du jeu...

Pour deux joueurs A et B, une partie de dés se déroule de la manère suivante. A commence la première manche et jette deux dés. Si la somme des points marqués sur les deux dés est six, A est vainqueur et le jeu s'arrête. Sinon B lance à son tour les deux dés. Si la somme des points marqués sur les deux dés est sept, B est vainqueur et le jeu s'arrête. Sinon une nouvelle manche est jouée. On souhaite déterminer la probabilité que A gagne la partie.

Question 1.1 : Modélisation

Modéliser ce problème à l'aide de séquences de variables aléatoires dont on précisera les lois et les propriétés.

Réponse 1.1 :

On modélise le problème par deux séquences de variables aléatoires de Bernoulli, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, avec la sémantique $X_n = 1$ (resp. $Y_n = 1$) si le joueur A (resp. B) obtient 6 (resp. 7) à la n-ième manche et la variable vaut 0 sinon.

On suppose que les variables X_n (resp. Y_n) sont indépendantes, de même loi $\mathcal{B}(p)$ (resp. $\mathcal{B}(q)$) et que le variables X et Y sont indépendantes.

p (resp. q) est la probabilité que la somme de 2 dés vaille 6 (resp. 7). On fait l'hypothèse que les résultats des 2 dés sont modélisés par des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{1, \cdots, 6\}$. D'où

$$p = \frac{5}{36} \text{ et } q = \frac{6}{36}.$$

Question 1.2 : Probabilité de gagner à la première manche

Calculer la probabilité que A gagne à la première manche. Même question pour B.

Réponse 1.2 :

L'événement A gagne à la 1-ère manche s'écrit $X_1 = 1$ et on a

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p.$$

L'événement B gagne à la 1-ère manche s'écrit $(X_1 = 0, Y_1 = 1)$ et on a

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, Y_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(Y_1 = 1)(1-p)q.$$

Question 1.3 : Probabilité de gagner à la n-ième manche

Calculer la probabilité que la n-ième manche soit effectivement jouée et que A gagne cette manche. Même question pour B.

Réponse 1.3 :

L'événement A gagne à la n-ème manche s'écrit $(X_1 = 0, Y_1 = 0, \cdots, X_{n-1} = 0, Y_{n-1} = 0, X_n = 1)$ et on a

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, Y_1 = 0, \cdots, X_{n-1} = 0, Y_{n-1} = 0, X_n = 1) = [(1-p)(1-q)]^{n-1}p.$$

L'événement B gagne à la n-ième manche s'écrit $(X_1 = 0, Y_1 = 0, \cdots, X_{n-1} = 0, Y_{n-1} = 0, X_n = 0, Y_n = 1)$ et on a

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, Y_1 = 0, \cdots, X_{n-1} = 0, Y_{n-1} = 0, X_n = 0, Y_n = 1) = [(1-p)(1-q)]^{n-1}(1-p)q.$$

Question 1.4 : Probabilité de gagner

Calculer la probabilité que A gagne la partie. Même question pour B. A et B vont-ils jouer indéfiniment ?

Réponse 1.4 :

L'événement A gagne la partie est l'union disjointe des événement A gagne à la n-ième manche pour n allant de 1 à $+\infty$.

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne}) = \sum_{n=1}^{+\infty} [(1-p)(1-q)]^{n-1} p = p \frac{1}{1-(1-p)(1-q)}.$$

De même

$$\mathbb{P}(B \text{ gagne}) = \sum_{n=1}^{+\infty} [(1-p)(1-q)]^{n-1} (1-p)q = (1-p)q \frac{1}{1-(1-p)(1-q)}.$$

On a

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne}) + \mathbb{P}(A \text{ gagne}) = \frac{p+(1-p)q}{1-(1-p)(1-q)} = 1.$$

donc l'un des 2 joueurs finira toujours par gagner.

Application numérique

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne}) = \frac{\frac{5}{36}}{1-(1-\frac{5}{36})(1-\frac{6}{36})} = \frac{5.36}{36.6-31.30} = \frac{5.6}{36.6-31.5} = \frac{30}{61}.$$

Donc le jeu n'est pas équitable ($\mathbb{P}(A \text{ gagne}) < \frac{1}{2}$) mais presque...

Question 1.5 : Modélisation markovienne

Modéliser ce jeux sous la forme d'une chaîne de Markov dont on précisera la matrice de transition. Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

Réponse 1.5 :

On représente le jeu par un automate à 4 états
1 : c'est à A de jouer
2 : c'est à B de jouer
3 : A a gagné
4 : B a gagné

Les probabilités de transitions sont :
$p_{1,3} = p$
$p_{1,2} = 1-p$
$p_{2,4} = q$
$p_{2,1} = 1-q$
$p_{3,3} = 1$
$p_{4,4} = 1$

On note $a_i = \mathbb{P}(X_\infty = 3 | X_0 = i)$ et on a un système d'équations :

$$\begin{cases} a_1 = pa_3 + (1-p)a_2 \\ a_2 = qa_4 + (1-q)a_1 \\ a_3 = 1 \\ a_4 = 0 \end{cases}$$

D'où

$$a_1 = p + (1-p)(1-q)a_1$$

et finalement

$$a_1 = \frac{p}{1-(1-p)(1-q)}$$

Records

On considère une suite de variables aléatoires réelles $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes, de même loi de densité f. On dit qu'il y a record à l'étape n si

$$X_n \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} X_i.$$

Question 2.1 : Probabilité de record

Déterminer la probabilité de record à l'étape n.

Réponse 2.1 :

Il faut remarquer que les variables étant à densité, la probabilité que 2 variables soient égales est 0 (les valeurs sont toutes différentes). La probabilité que le dernier soit le plus grand est donc $\frac{1}{n}$ car les va sont iid

Question 2.2 : Nombre de records jusqu'à n

Déterminer le nombre moyen $\mathbb{E}R_n$ de records de l'étape 1 à l'étape n.

Réponse 2.2 :

On note Y_n la variable de Bernoulli indiquant si n est un record. On a donc

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

comme l'opérateur espérance est linéaire

$$\mathbb{E}R_n = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}Y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Question 2.3 : Comportement asymptotique

Donner un équivalent de $\mathbb{E}R_n$ lorsque n est grand. Que pensez-vous de l'assertion : *Un record finira toujours par être battu* ?

Réponse 2.3 :

On a

$$\log n = \int_1^n \frac{1}{x}dx \leqslant \mathbb{E}R_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx = 1 + \log n.$$

Et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}R_n = +\infty.$$

Collision

Dans un réseau slotté, on note par X_i la variable aléatoire indiquant s'il y a émission sur le slot i. On dira qu'il y a collision si il y a émission sur 2 slots successifs (un slot vide doit séparer 2 communications). On supposera les $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ indépendantes identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{2}{3}$.

Soit N le numéro de slot ayant la première collision, on note $p_k = \mathbb{P}(N = k)$.

Question 3.1 : Equation de récurrence

Donner une équation de récurrence sur les p_k.

Réponse 3.1 :

Question 3.2 : Fonction génératrice

En déduire que la fonction génératrice de N est

$$G_N(x) = \frac{4}{24}x^2\left[\frac{2}{1-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}x}\right].$$

Réponse 3.2 :

Question 3.3 : Probabilités

En déduire les valeurs de p_k et $\mathbb{E}N$.

Réponse 3.3 :

Question 3.4 : Débit

Calculer le débit effectif du réseau.

Réponse 3.4 :

Générateur inconnu

On considère l'algorithme suivant :

{Les appels successifs à la fonction random renvoient une séquence de nombres réels indépendants et uniformément distribués sur $[0, 1[$.}
répéter
  u=random() ;
  $X = \frac{1}{1+u}$;
jusqu'à $X \leqslant \frac{3}{4}$
retourner X

Question 4.1 : Densité

Calculer la densité de la variable aléatoire X retournée, sa moyenne et sa variance.

Réponse 4.1 :

On calcule d'abord la loi de $Y = \frac{1}{1+U}$ où U suit une loi uniforme sur $[0, 1[$, pour cela on calcule la fonction de répartition de Y, en remarquant que Y prend ses valeurs dans $]\frac{1}{2}, 1]$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(\frac{1}{1+U} \leqslant y) = \mathbb{P}(U \geqslant \frac{1}{y} - 1) = 1 - (\frac{1}{y} - 1) = 2 - \frac{1}{y}.$$

La densité de Y est donc

$$f_Y(y) = \frac{1}{y^2}.$$

Pour obtenir la densité de X on conditionne par l'événement $Y \leqslant \frac{3}{4}$, donc la densité est

$$f_X(x) = \alpha f_Y(x) \text{ pour } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}],$$

et vaut 0 ailleurs. Le coefficient C est tel que f_X est une densité, c'est à dire :

$$1 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f_X(x)dx = C \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{x^2}dx = C(2 - \frac{4}{3}) = \alpha\frac{2}{3}.$$

C'est à dire $C = \frac{3}{2}$. A partir de la densité on calcule la moyenne

$$\mathbb{E}X = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}dx = \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{x}dx = \frac{3}{2}\log\frac{3}{4} - \log\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\log\frac{3}{2} = 1.5(\log 3 - \log 2) \simeq 0.608.$$

Pour calculer la variance, on utilise $\mathbb{V}arX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$. Or

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x^2\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}dx = \frac{3}{2}\frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

On en déduit

$$\mathbb{V}arX = 0.375 - 0.608^2 = 510^{-3}.$$

On en déduit l'écart-type $\sigma = 710^{-2}$.

On implante ce simulateur et, pour le tester, on génère un échantillon de taille $n = 1000$. La moyenne empirique de cet échantillon est $0,583$.

Question 4.2 : Test

Qu'en pensez-vous ?

Réponse 4.2 :

Si le générateur était bon, on calcule l'intervalle de confiance associé à l'estimateur de la moyenne avec un niveau de confiance donné α. Les bornes de l'intervalles, pour $\alpha = 95\%$, sont données par

$$\epsilon = \frac{\Phi_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.96\ 710^{-2}}{\sqrt{1000}} \simeq 4.410^{-3}.$$

L'intervalle de confiance à 95% est donc $0,608 \pm 510^{-3}$, la valeur observée $0,583$ n'est pas dans l'intervalle de confiance, ce qui conduit à rejeter cette implantation.

Question 4.3 : Analyse du générateur

Cet algorithme est-il efficace ? Sinon proposer un autre algorithme.

Réponse 4.3 :

On aurait pu inverser la fonction de répartition, $F_X(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{3}{2}\frac{1}{t^2}dt = \frac{3}{2}(2 - \frac{1}{x})$.

$$F_X^{-1}(u) = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}u},$$

qui est de même complexité d'une seule itération de l'algorithme précédent.