

Contrôle de connaissances

Durée : 45 minutes Documents interdits.

Une partie des points tient compte de la clarté et de la présentation des réponses. Une réponse non justifiée vaut zéro.

1 Culture générale

Question 1.1 : Kendall

Quelles sont les caractéristiques d'une file M/M/K/K ? Donnez un exemple typique de système que cette file peut modéliser.

Question 1.2 : Petite formule

Comment peut-on relier le temps de réponse au nombre de clients dans un système ?

Question 1.3 : Simulation

Donnez les avantages et inconvénients de la simulation numérique par opposition à la mesure du système réel.

2 Deux par deux

On considère un serveur sur lequel les tâches des clients arrivent systématiquement **par groupe de 2**. À chaque instant $n \in \mathbb{N}$, un groupe de 2 tâches arrive avec une probabilité a , et ce indépendamment de l'état du système. Lorsque des tâches sont en cours ou en attente sur le serveur, celui-ci travaille à une vitesse variable (due à une charge externe, non étudiée). Pour modéliser cet effet, à chaque instant la tâche en cours se termine avec une probabilité p (maximum **un seul départ** par unité de temps). Cette probabilité est supposée indépendante du temps depuis lequel la tâche est dans le système (ou même en service) et du nombre de tâches en attente.

On note X_n le nombre de tâches dans le système à l'instant n .

Question 2.1 : CMTD

Montrer que le processus $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène.

Question 2.2 : Classification

Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Apériodique ? Prouvez vos réponses.

Question 2.3 : Transitions

Donnez, au choix, le graphe de transition ou la matrice de transition P de cette chaîne de Markov.

Question 2.4 : Comportement asymptotique

Que se passe-t-il si $p = a = 1$? Écrivez les équations d'équilibre. La chaîne converge-t-elle en loi vers une distribution stationnaire ?

3 Elle oublie tout

Question 3.1 : Propriété sans mémoire

Prouver qu'une distribution exponentielle est sans mémoire.

Question 3.2 : L'unique

Prouver qu'une distribution sans mémoire est exponentielle.

4 Laurel et Hardy

On souhaite comparer les temps de réponse (en secondes) de deux programmes appelés respectivement **Laurel** et **Hardy**. On les exécute sur des machines identiques un certain nombre de fois, sur les mêmes jeux de données (Traces 1 et 2), et l'on cherche à déterminer quel est le meilleur programme. Les résultats (données brutes et représentation graphique) sont fournis en annexe.

Question 4.1 : Confiance

Calculer les intervalles de confiance à 95% pour les temps moyens de réponse.

Question 4.2 : Conclusion

Qu'en pensez-vous ?

Programme	Laurel		Hardy	
Jeu de données	Trace 1	Trace 2	Trace 1	Trace 2
	7,4	8,1	8,2	5,5
	8,1	7,8	8,9	6,2
	8,7	7,9	9,5	4,1
	7,2	8,4	9,7	3,2
	8,3	8	9,1	5,9
	7,5	7,7	9,4	5,4
	8,6	8,3	9,6	2,8
	8,4		9,2	
	8		8,7	
	8,4		9,1	
	8,2		8,6	
	7,8		8,6	
	8,4		9,2	
Moyenne	8.08	8.03	9.06	4.73
Écart-type	0.47	0.26	0.44	1.36
Moyenne globale	8.06		7.55	
Écart-type global	0.4		2.28	

TABLE 1 – Temps de réponse comparés sur deux jeux de données