

**Durée 45mn.**

**Documents interdits.**

Barème indicatif. Une partie des points tient compte de la clarté de la rédaction et de la présentation. Chaque réponse non justifiée rapporte 0 points.

## 1 ABBA (13pts)

Une suite de A et de B est formée comme suit. La première lettre est choisie au hasard,  $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = \frac{1}{2}$ , ainsi que la deuxième, indépendamment de la première. Quand les  $(n-2)$  premières lettres ont été sélectionnées, la  $(n+1)$ -ème est choisie, indépendamment des lettres dans les positions  $k \leq n-2$ , et conditionnellement à la paire formée par les lettres en position  $n-1$  et  $n$ , comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+1} = A | X_{n-1} = A, X_n = A] &= \frac{1}{2}, & \mathbb{P}[X_{n+1} = A | X_{n-1} = A, X_n = B] &= \frac{1}{2}, \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = A | X_{n-1} = B, X_n = A] &= \frac{1}{4}, & \mathbb{P}[X_{n+1} = A | X_{n-1} = B, X_n = B] &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dans ce problème, on cherche à évaluer les proportions de A et de B au long terme. On appelle  $X_n$  la variable aléatoire représentant la  $n$ -ième lettre choisie.

**Question 1.1 :** Markov

Le processus  $(X_n)$  est-il une chaîne de Markov ? Justifiez.

On considère maintenant la variable  $Z_n = (X_{n-1}, X_n)$ .

**Question 1.2 :** Markov, encore

Le processus  $(Z_n)$  est-il une chaîne de Markov ? Justifiez. Quel est son espace d'états ?

**Question 1.3 :** Au commencement

Donnez sa distribution initiale  $\pi_1$  (loi de  $(Z_1)$ ) en précisant l'ordre choisi pour les états.

**Question 1.4 :** Évolution

Donnez, au choix, son graphe ou sa matrice de transition  $P$ .

**Question 1.5 :** Convergence

Le processus  $(Z_n)$  est-il ergodique ?

**Question 1.6 :** Équilibre

Écrire et résoudre les équations d'équilibre.

**Question 1.7 :** Conclusion

En déduire la proportion de A et de B à long terme.

## 2 Cours (7pts)

**Question 2.1 :** Petite formule

Comment peut-on relier l'espérance du temps de séjour au nombre moyen de clients dans un système ?

**Question 2.2 :** Kendall

Quelles sont les caractéristiques d'une file  $M/G/\infty$  ? Donnez un exemple typique de système que cette file peut modéliser.

**Question 2.3 :** Carpe Diem

Combien d'événements d'un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  peut-on observer en moyenne pendant un temps  $T$  ?