

**Durée 1 heure. Documents interdits.** Une partie des points tient compte de la clarté de la rédaction et de la présentation. Une réponse non justifiée donne lieu à la note 0.

## 1 Connaissez-vous votre cours ?

### Question 1.1 : Kendall

Quelles sont les caractéristiques d'une file M/M/c/c ? Donnez un exemple typique de système que cette file peut modéliser.

### Question 1.2 : Petite formule

Comment peut-on relier le temps de réponse au nombre de clients dans un système ?

### Question 1.3 : Simulation

Quels sont les écueils à éviter lorsqu'on simule un système pour évaluer sa performance ?

## 2 Deux par deux

On considère un serveur sur lequel les tâches des clients arrivent systématiquement **par groupe de 2**. À chaque instant  $n \in \mathbb{N}$ , un groupe de 2 tâches arrive avec une probabilité  $a$ , et ce indépendamment de l'état du système. Lorsque des tâches sont en cours ou en attente sur le serveur, celui-ci travaille à une vitesse variable (due à une charge externe, non étudiée). Pour modéliser cet effet, à chaque instant la tâche en cours se termine avec une probabilité  $p$  (maximum **un seul départ** par unité de temps). Cette probabilité est supposée indépendante du temps depuis lequel la tâche est dans le système (ou même en service) et du nombre de tâches en attente.

On note  $X_n$  le nombre de tâches dans le système à l'instant  $n$ .

### Question 1.4 : CMTD

Montrer que le processus  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov homogène.

### Question 1.5 : Classification

Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Apériodique ? Prouvez vos réponses.

### Question 1.6 : Transitions

Donnez, au choix, le graphe de transition ou la matrice de transition  $P$  de cette chaîne de Markov.

### Question 1.7 : Comportement asymptotique

Que se passe-t-il si  $p = a = 1$  ?

## 3 Qui est le meilleur ?

”Much to learn, you still have.”

*Yoda, Star Wars Episode II : Attack of the Clones.*

On souhaite comparer les temps de réponse (en secondes) de deux programmes appelés respectivement **Chewbacca** et **R2-D2**. On les exécute sur des machines identiques un certain nombre de fois, sur les mêmes jeux de données (Traces 1 et 2), et l'on cherche à déterminer quel est le meilleur programme. Les résultats (données brutes et représentation graphique) sont fournis en annexe.

**Question 1.8 : Évaluation**

Quelles critiques peut-on formuler sur la méthode de comparaison employée ?  
Et sur les résultats observés ?

**Question 1.9 : Confiance**

Quel degré de confiance peut-on avoir dans le temps *moyen* de réponse ? Justifiez vos calculs.

**Question 1.10 : Comparaison**

Quantifiez et commentez les performances de ces deux programmes. Lequel choisiriez-vous ?

**Annexe : Temps de réponse de Chewbacca et R2-D2**

Programme	Chewbacca		R2-D2	
Jeu de données	Trace 1	Trace 2	Trace 1	Trace 2
	7,4	8	8,2	4,4
	8,1	7,9	8,9	4,9
	8,7	8,4	9,5	4,8
	8,5	8	9,7	4,9
	8,3	7,7	9,1	4,6
	7,5	8,3	9,4	4,7
	8,6	0,1	9,6	4,8
	8,4		9,2	
	8		8,7	
	8,4		9,1	
	8,2		8,6	
	7,8		8,6	
	8,4		9,2	
Moyenne	8.18	6.91	9.06	4.73
Écart-type	0.4	3.01	0.44	0.18
Moyenne globale	7.74		7.55	
Écart-type global	1.83		2.15	

TABLE 1 – Temps de réponse comparés sur deux jeux de données

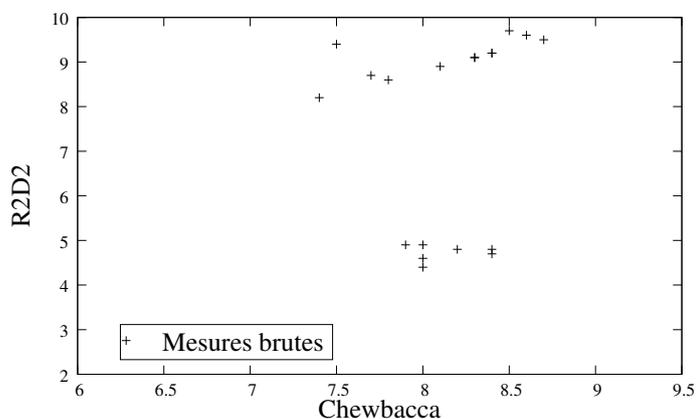


FIGURE 1 – Représentation graphique des mesures