

# Examen d'Évaluation de Performances

vendredi 20 avril 2012

- Durée : 2 heures
- Documents : interdits à l'exception d'une feuille recto-verso manuscrite
- Calculatrice autorisée
- Téléphones interdits
- Barème indicatif tenant compte de la clarté de la présentation et de la qualité de la rédaction.
- Seules les réponses justifiées seront prises en compte.

## 1 Culture générale

### Question 1.1 : Simulation

Donner en pseudo-code l'algorithme de simulation à événements discrets.

### Question 1.2 :

Qu'est-ce que l'ergodicité ? En quoi est-elle importante ?

### Question 1.3 : Bon sens

Expliquer la différence entre corrélation et causalité.

### Question 1.4 : Modélisation

Peut-on modéliser la demande de trafic d'un serveur de VoD par un processus de Poisson ?

## 2 Chocolats

Chaque année à Pâques<sup>1</sup>, les mangeurs de chocolat adoptent un type de chocolat, pour une durée d'un an renouvelable. Durant cette année, il ne mangeront que le type de chocolat qu'ils ont choisi à Pâques.

Un sondage effectué sur un échantillon de 100 clients d'une chocolaterie renommée a donné les chiffres suivants :

- parmi les mangeurs de chocolat noir, 65% sont fidèles à leur choix, tandis que 35% préfèrent essayer le chocolat au lait.

---

1. Exercice librement inspiré du poly de M. Petitot (Enic).

- De même, parmi les mangeurs de chocolat au lait, 70% restent fidèles et 30% changent pour le noir.

L'année du sondage, il y a 50% de mangeurs de chocolat noir et 50% de mangeurs de chocolat au lait.

Le chocolatier cherche à prévoir au mieux sa production annuelle de chaque type de chocolats.

### Question 2.1 : Statistiques

Que pensez-vous de la fiabilité du sondage ?

On suppose que les chiffres récoltés sont fiables.

### Question 2.2 : Prévision à court terme

Quelle sera la tendance l'année prochaine ?

Le chocolatier cherche maintenant à établir une stratégie à plus long terme afin de négocier avec ses fournisseurs.

### Question 2.3 :

Peut-on connaître la tendance au bout de quelques années, en supposant que les résultats des enquêtes ne changent pas ? Si oui, quelles seront les proportions des mangeurs de chocolat noir et de chocolat au lait ?

## 3 Impatience

Des clients arrivent à une station de taxi selon un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ . L'unique taxi en service prend les clients dans l'ordre d'arrivée. Chaque course dure un temps exponentiellement distribué de paramètre  $\mu$ .

La file d'attente n'est pas limitée, mais les clients sont impatients : avant d'entrer dans la file, un nouvel arrivant à l'instant  $t$  compte le nombre de clients déjà présents  $N(t)$  (y compris celui qui se trouve dans le taxi). S'il constate un nombre  $n$  de clients, le nouveau client décide :

- de rejoindre la file avec probabilité  $\frac{1}{n+1}$
- de quitter le système instantanément avec probabilité  $1 - \frac{1}{n+1}$ .

### Question 3.1 : Modèle de trafic

Expliquer pourquoi le processus d'arrivée réel (après décision) des clients dans la file est Poissonien.

### Question 3.2 : Modélisation

Prouver que le processus  $N(t)$  est une chaîne de Markov à temps continu. Donner son espace d'états.

**Question 3.3 : Analyse**

Donner, en le justifiant, le diagramme de transition de cette chaîne (ou son générateur infinitésimal). Quel processus reconnaissez-vous ?

**Question 3.4 : Stabilité**

Quelle est la condition de stabilité de ce système ?

**Question 3.5 : Régime stationnaire**

Calculer la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système.

**Question 3.6 : Débit**

Calculer le débit moyen d'arrivée des clients dans la file.

## 4 Sondage

Deux candidats à une élection sont au coude-à-coude au second tour. Le plus récent sondage indique que le candidat Castor est crédité de 51,1% d'intentions de vote, contre 48,9% pour son opposant Pollux. (Sondage effectué auprès d'un échantillon de 1000 personnes.)

**Question 4.1 : IC**

Calculer les intervalles de confiance à 95% pour les scores des deux candidats.

**Question 4.2 : Aux manettes**

Quelle taille d'échantillon faudrait-il pour pouvoir affirmer à 95% de certitude qui est en tête des intentions de vote ?