Examen d'Évaluation de Performances

jeudi 21 avril 2011

- Durée : 2 heures
- Documents : interdits à l'exception d'une feuille recto-verso manuscrite
- Calculatrice autorisée
- Téléphones interdits
- Barème indicatif tenant compte de la clarté de la présentation et de la qualité de la rédaction.
- Seules les réponses justifiées seront prises en compte.

1 La vie des gangsters (4pts)

(Exercice adapté de *Initiation aux Probabilités et aux chaînes de Markov*, Pierre Brémaud, Springer-Verlag, réédition de 2009.)

Trois personnages armés, A, B, et C, se trouvent soudainement en présence au carrefour d'une rue de Washington, D.C., et sur ce, se mettent tout naturellement à se tirer dessus.

Chaque survivant tire sur un autre survivant de son choix toutes les 10 secondes. Les probabilités d'atteindre la cible pour A, B, et C à chaque tir sont respectivement α, β, et γ. A est le plus haï des trois, et donc, tant qu'il vit, B et C s'ignorent et lui tirent dessus. Pour des raisons historiques que nous ne développerons pas, A ne peut pas sentir B, et donc il ne tire que sur B tant que ce dernier est vivant. Le bienheureux C n'est visé que lorsqu'il se trouve en présence de A seul ou de B seul.

Question 1.1 : Modélisation

Modéliser ce problème par une chaîne de Markov dont on donnera l'espace d'états ainsi que le graphe ou la matrice de transition.

Question 1.2 : Cours

Cette CMTD est-elle ergodique ? Justifiez.

2 Confiance et simulation (5pts)

On considère le problème de mémoire paginée vu en TD. Le programme simule une politique *move-to-front* sur une mémoire donnée pendant un certain temps (nombre d'itérations). Cette simulation est répétée un certain nombre de fois (nombre de simulations).

Le résultat retournés par le programme est la probabilité de défaut de page mesuré *pour chaque trajectoire* (nombre d'échecs / nombre de requêtes), suivi d'un bilan statistique donnant la probabilité de défaut de page moyenne p observée sur l'ensemble des simulations, ainsi que l'écart-type empirique $\hat{\sigma}$.

On cherche à apprécier la qualité de l'évaluation fournie par cette simulation, c'est à dire à approcher le plus fidèlement possible la probabilité stationnaire de défaut de page.

On donne en Tableau 1 les **dernières lignes**[1] retournées par le programme : résultat de chaque trajectoire séparés par des espaces, puis une ligne finale reprenant les statistiques mesurées.

	150 itérations	15000 itérations
100 simulations	Expérience 1 : 0.513333 0.613333 0.526667 0.600000 0.573333 0.520000 p=0.553667 $\hat{\sigma}$ =0.049963	Expérience 2 : 0.562800 0.554733 0.557133 0.559000 0.562600 0.552533 p=0.558536 $\hat{\sigma}$ =0.004585
1000 simulations	Expérience 3 0.620000 0.520000 0.500000 0.606667 0.580000 0.566667 p=0.556980 $\hat{\sigma}$ =0.043643	Expérience 4 0.568133 0.554000 0.553733 0.560333 0.561133 0.562000 p=0.558235 $\hat{\sigma}$ =0.004654

TABLE 1 – Résultat d'expériences

Question 2.1 : Analyse

Donnez les intervalle de confiance à 95% pour la probabilité de défaut de page observée dans chacune des 4 expériences.

Question 2.2 : Interprétation

Peut-on conclure que l'une (voire plusieurs) de ces expériences donne une évaluation fiable de la probabilité stationnaire de défaut de page de la stratégie *move-to-front* ?

Question 2.3 : Plan d'expériences

Selon vous, quelle était, ou quelle serait, l'expérience idéale pour évaluer de façon fiable cette probabilité stationnaire ? Justifiez.

3 Modèle d'Engset (11pts)

On considère un modèle de concentrateur téléphonique doté de c canaux pour un ensemble de N clients. On suppose $N > c$. **Chacun des N clients** émet des requêtes (appels) pour obtenir un canal de communication. On remarque que contrairement au modèle d'Erlang qui suppose des arrivées d'appels selon un processus de Poisson, ici le nombre de clients est fini.

Lorsqu'un client n'est pas déjà en communication, il émet un appel après un temps de réflexion distribué selon une loi exponentielle de paramètre α. Si un canal est libre à cet instant, il lui est alors immédiatement attribué.

La durée d'un appel est exponentiellement distribuée de paramètre μ. Les clients sont indépendants entre eux, et la durée d'un appel est indépendante du temps de réflexion.

1. Le nombre de simulations de chaque expérience est trop élevé pour présenter ici la totalité des résultats obtenus.

Ce modèle s'appelle le modèle d'Engset[2].

Question 3.1 : Représentation

Faites un dessin illustrant votre vision du modèle.

Si un appel arrive lorsque les c canaux sont occupés, l'appel est perdu. On cherche à évaluer la probabilité p de perdre un appel en fonction des paramètres du système : N, c, α, μ. Pour simplifier les notations, on pose :

$$\rho = \frac{\alpha}{\mu}$$

Soit X_t le nombre de canaux occupés à l'instant t.

Question 3.2 : Modélisation

Montrez que X_t est une CMTC homogène ergodique et donnez son espace d'états.

Question 3.3 : Dynamique

Calculer son graphe de transition ou son générateur infinitésimal.

On note π le vecteur des probabilités d'état stationnaires $\pi_i = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}[X_t = i]$.

Question 3.4 : Réversibilité

Le processus X_t est-il réversible ?

Question 3.5 : Régime stationnaire

Montrez que les probabilités d'état stationnaires π_i vérifient :

$$\pi_i = \frac{\binom{N}{i}\rho^i}{\sum_{k=0}^{c}\binom{N}{k}\rho^k} \tag{1}$$

où $\binom{N}{i}$ dénote le coefficient binomial (combinaison de k parmi n).

On cherche maintenant à estimer la probabilité de perte p. On veut donc calculer la probabilité que tous les canaux soient occupés aux *instants d'arrivée* des appels.

Question 3.6 : Observation aux instants d'arrivée

Expliquer pourquoi le théorème PASTA ne s'applique pas ici.

Question 3.7 : Taux d'arrivée des appels pour chaque état

Calculer le taux d'arrivée des appels lorsque i canaux sont occupés.

Question 3.8 :

En déduire le taux global d'arrivée des appels en fonction des π_i, $1 \leqslant i \leqslant c$.

Question 3.9 : Fraction des appels perdus

En déduire la fraction des p appels arrivant lorsque les c canaux sont occupés, d'abord en fonction des $\pi_i, 1 \leqslant i \leqslant c$.

2. D'après Tore Olaus Engset, mathématicien norvégien.

Question 3.10 : formule d'Engset

Utiliser l'équation (1) pour montrer que

$$p = \frac{\binom{N-1}{c}\rho^c}{\sum_{k=0}^{c}\binom{N-1}{k}\rho^k} \qquad \text{(formule d'Engset, 1918)} \tag{2}$$

Question 3.11 : (Bonus) Comportement limite et modèle d'Erlang

Cette question est facultative. On suppose que $N \to \infty$ et $\alpha \to 0$ en gardant toujours constant le rapport $M\alpha = \lambda$. Montrez qu'alors la limite de p devient :

$$p = \frac{\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{\sum_{k=0}^{c}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} \tag{3}$$

donnée par la formule de perte d'Erlang. Expliquez pourquoi.