Durée 2 heures.
Documents interdits, à l'exception **d'une feuille manuscrite recto-verso.**
Téléphones portables strictement interdits.
Calculatrice autorisée.

Le barème est indicatif et tient compte de la clarté de la rédaction et de la présentation. Une réponse non justifiée donne lieu à la note 0.

1 Connaissances générales (5pt)

Question 1. Qu'est-ce que la gigue ?

Question 2. Qu'est-ce qu'un processus stationnaire (au sens strict) ?

Question 3. Pourquoi dit-on de la loi exponentielle qu'elle est "sans mémoire" ?

Question 4. Le processus de Poisson est-il un modèle de trafic applicable sur Internet ?

2 Transmission avec erreurs (5pt)

On considère un système de communication rudimentaire où chaque message consiste en 1 seul bit d'information (0 ou 1).

Ce message doit transiter par une succession de canaux bruités, où la probabilité d'erreur binaire (i.e. de recevoir 0 au lieu de 1, et vice-versa) est $1-p$. Pour chaque traversée de canal, la probabilité de transmission correcte du message est donc p. On suppose de plus que $0 < p < 1$ et que la probabilité d'erreur sur un canal est indépendante de celle sur les autres canaux.

On note X_n l'état du message après traversée du n $^{\text{ième}}$ canal, avec $X_n = 1$ si le message est intact et $X_n = 0$ s'il est modifié. Par convention on a $X_0 = 1$.

Question 5. Montrer que X_n est une chaîne de Markov à deux états et donner son graphe de transition ainsi que sa matrice de transition P.

Question 6. Cette chaîne admet-elle une distribution stationnaire ?

Question 7. Quelle est la probabilité que le message reçu soit conforme à l'original après avoir traversé 2 canaux ?

Question 8. Que devient cette probabilité quand le nombre de canaux n tend vers l'infini ?

3 Le réparateur (5pt)

Une unité de production possède K machines et emploie un unique technicien de maintenance. Chaque machine tombe en panne après un temps exponentiellement distribué selon un paramètre α (taux de panne de chaque machine).

Lorsqu'une panne survient, le technicien est prévenu. Les requêtes pour les réparations sont enregistrées et traitées dans l'ordre d'arrivée. Le temps de réparation est exponentiellement distribué selon un paramètre μ.

Les durée de vie et de panne de chaque machine sont supposées indépendantes.

Soit $X(t)$ le nombre de machines en service à l'instant t.

Question 9. Donnez le générateur infinitésimal et le graphe de transition de $X(t)$.

Question 10. Ce processus admet-il un régime stationnaire ? Justifiez votre réponse.

Question 11. Quelle file d'attente classique reconnaissez-vous ?

Question 12. En utilisant les résultats connus sur cette file d'attente, ou en résolvant les équations d'équilibre (au choix), donnez la distribution stationnaire $\pi(i) = \mathbb{P}(i \text{ machines en service})$ pour $0 \leq i \leq K$.

Question 13. Quel est le nombre moyen de machines en service dans cette unité ?

4 Modélisation de serveur (5pt)

On considère un modèle simplifié de serveur Web :

- Les requêtes pour les fichiers arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ.
- Lors de l'arrivée d'une requête, le serveur regarde d'abord si la page correspondante est chargée en mémoire (dans le cache). Cette opération prend un temps exponentiellement distribué de paramètre μ_1.
- Le fichier est présent dans le cache avec probabilité p, et fait défaut avec probabilité $1 - p$.
- En cas de défaut de cache (fichier absent du cache), le fichier doit être lu sur le disque. Cette opération prend un temps exponentiellement distribué de paramètre μ_2.
- Une fois le fichier lu (sur cache ou sur disque), il est transmis sur le réseau. Cette transmission prend un temps exponentiellement distribué de paramètre μ_3.

On modélise le système par le réseau de files d'attentes présenté en Figure 1.

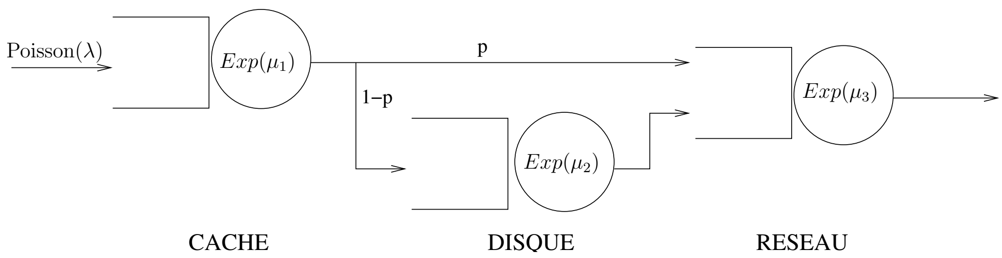

FIGURE 1 – Modélisation du serveur WEB par un réseau de files d'attente

Question 14. Comment s'appelle ce type de réseau de files d'attente ?

Question 15. Le trafic arrivant sur le réseau (i.e., la file 3) est-il poissonnien ? Justifiez votre réponse.

Question 16. Pour chaque file $i \in 1, 2, 3$ du réseau de la Figure 1, calculez le taux λ_i d'arrivée des clients à cette file.

Question 17. Quelle est la condition de stabilité du système ?

Question 18. Donner le nombre moyen de clients dans chaque file.

Question 19. En déduire le temps de réponse moyen des requêtes.