RICM	Deuxième année
Examen Évaluation de performance	session Avril 2006

Durée 2h

Calculatrice et documents autorisés

Le barème est indicatif

Problème : arrivées groupées (*17 points*)

Des tâches arrivent groupées à un serveur. Le serveur traite ces tâches une par une et tant que toutes les tâches du groupe n'ont pas été traitées, les groupes de tâches arrivant sont rejetés.

Un groupe de tâches est formé d'au maximum K tâches. Il y a donc au maximum K tâches non traitées dans le système. On suppose que la probabilité qu'un groupe de tâches soit composé de j tâches $(1 \leq j \leq K)$ est de $\frac{1}{K}$.

On note $X = (X_t)_{t \geq 0}$ le processus aléatoire décrivant le nombre de tâches acceptées dans le système et dont le traitement n'est pas terminé à l'instant t. On modélise le processus d'arrivée des groupes de tâches par un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. Le temps moyen de traitement d'une tâche est de $\frac{1}{\mu} > 0$.

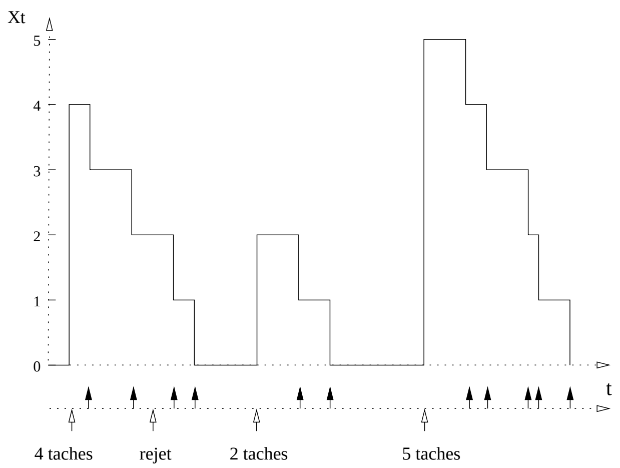

FIG. 1 – Exemple d'évolution du nombre de tâches non traitées au cours du temps $(K = 5)$. L'arrivée d'un groupe de tâches est représentée par une flèche blanche. La fin de traitement d'une tâche est représentée par une flèche noire.

Question 1 : (*1 points*)

Donner en fonction de λ et de K le nombre moyen de tâches arrivant en une unité de temps.

Question 2 : (*3 points*)

En utilisant les propriétés des processus de Poisson, que pouvez-vous dire du processus d'arrivées des groupes de tâches composés de j tâches.

Donner en fonction de λ et de K le nombre moyen de groupes composés de j tâches arrivant en une unité de temps.

Question 3 : (*2 points*)

Montrer que X est un **processus** de Markov homogène. Donner le graphe d'états et le générateur **infinitésimal** du processus, est-il irréductible ?.

On note π_i la probabilité stationnaire d'avoir i tâches non traitées dans le système.

Question 4 : (*3 points*)

Calculer (en fonction de λ, μ et K) la probabilité stationnaire du processus (ie : calculer π_i $\forall i$).

On rappelle que :

$$\sum_{i=1}^{K} 1 - \frac{i-1}{K} = \sum_{i=1}^{K} \frac{K-(i-1)}{K} = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} j = \frac{1}{K}\frac{K(K+1)}{2} = \frac{K+1}{2}$$

Question 5 : (*2 points*)

Calculer, d'abord en fonction des π_i puis en fonction de λ, μ et K, le nombre moyen de tâches dans le système en régime stationnaire.

Question 6 : (*2 points*)

Quel est le temps moyen de séjour (en fonction des π_i puis en fonction de λ, μ et K) d'une tâche dans le système ?

Quelle est la probabilité que le serveur soit utilisé ? non utilisé ?

Question 7 : (*2 points*)

Quelle est la probabilité stationaire qu'une tâche soit rejetée ?

Quel est le nombre moyen de tâches perdues par unité de temps ?

Question 8 : (*2 points*)

Donner deux ou trois applications de ce modèle dans le monde de l'informatique et des télécommunications.

Exercice : modélisation d'un centre d'appels (*4 points*)

Le gérant d'un centre d'appels sait qu'il reçoit en moyenne A appels par heure et que le traitement d'un appel par un de ses employés dure en moyenne d minutes.

Il doit choisir le nombre K de lignes qu'il va louer à un opérateur téléphonique et le nombre S d'employés qu'il doit embaucher.

Si les K lignes sont utilisées les appels entrant sont rejetés (tonalité occupé). Par contre, si une des K lignes est disponible mais que les S employés sont occupés l'appel est mis en attente (petite musique). On peut donc prendre $S < K$.

Proposer (en justifiant votre réponse) une file d'attente qui permet de modéliser et de dimensionner le centre d'appels.