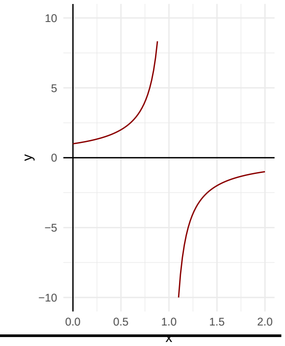
Prénom	Nom

INFO4 : Probabilités et Simulation – Quick 1 (12 Novembre 2019)

Exercice 1 : Densité et espérance

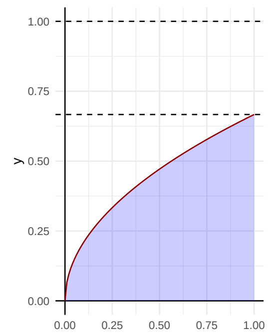
Les fonctions suivantes sont elles des densités (vous pourrez faire un dessin pour justifier) ? Le cas échéant, calculez l'espérance de la variable aléatoire correspondant.

Rappelons que : $\boxed{(f \text{ est une densité}) \Leftrightarrow (f \geqslant 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = 1)}$**. La non continuité de f, le fait qu'elle soit non bornée ou non définie en quelques endroits n'ont rien à voir et n'empèchent pas une fonction d'être une densité.**



▶ **Q1.1.** $f : \begin{cases} [0,2] \mapsto \mathbb{R} \\ x \quad \rightarrow \dfrac{1}{1-x} \end{cases}$

On peut bien sûr s'amuser à essayer d'intégrer cette fonction, mais il vaut mieux remarquer que $f(2) = -1 < 0$, ce qui suffit pour affirmer que f n'est pas une densité.



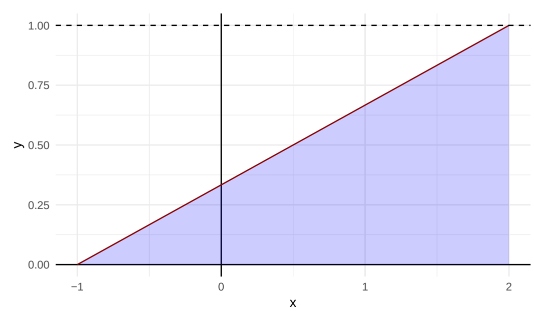
▶ **Q1.2.** $g : \begin{cases} [0,1] \mapsto \mathbb{R} \\ x \quad \rightarrow \dfrac{2}{3}\sqrt{x} \end{cases}$

Cette fonction est clairement positive et il suffit de regarder sa représentation graphique pour voir que son intégrale est inférieure à 1. g n'est donc pas une densité. On peut néenmoins le vérifier en calculant son intégrale :

$$\int_0^1 \frac{2}{3}\sqrt{x}.dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{9} < 1$$

▶ **Q1.3.** $h : \begin{cases} [-1,2] \mapsto \mathbb{R} \\ x \quad \rightarrow \dfrac{x+1}{3} \end{cases}$

Cette fonction est clairement positive et il suffit de regarder sa représentation graphique pour voir que son intégrale est supérieure à 1 (elle vaut trivialement 1,5). h n'est donc pas une densité.

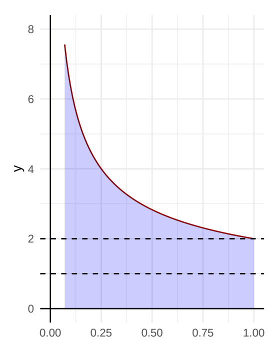


▶ **Q1.4.** $z : \begin{cases} [0,1] \mapsto \mathbb{R} \\ x \quad \rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x}} \end{cases}$

Cette fonction est clairement positive et il suffit de regarder sa représentation graphique pour voir que son intégrale est bien supérieure à 1 (elle vaut au moins 2). z n'est donc pas une densité. Mais son intégrale est néanmoins finie :

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}}.dx = 2\left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_0^1 = 4$$

Si on considérait $x \rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, on aurait bien une densité.



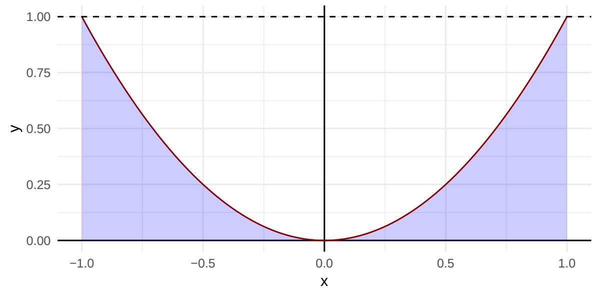
Exercice 2 : Générateurs

Étudiez des générateurs suivants. Vous indiquerez à chaque fois :

1. la méthode sous-jacente au générateur
2. la loi (densité) de la variable aléatoire qui correspond
3. la complexité (en nombre moyen d'appels à la fonction `runif`)

▶ Q2.1. Riri

```
riri=function() {
    while(T) {
        x = runif(1, min=-1, max=1)
        y = runif(1, min= 0, max=1)
        if(y<=x**2) { return(x) }
    }
}
```



1. On reconnaît ici une méthode du rejet (la génération de `x` et de `y` uniformes dans une boucle `while` tant qu'une condition sur `x` et `y` n'est pas vérifiée).
2. La forme générale de la condition d'acceptation d'une méthode de rejet est $y \leqslant M.f_Z(x)$ où f_Z est la densité de la loi que l'on cherche à générer et M est choisie de façon ce que f_Z soit majorée. La loi de `riri` est donc proportionnelle à $x \to x^2$. Pour que cela soit une densité, il faut cependant que l'intégrale vaille 1. Or $\int_{-1}^{1} x^2.dx = \frac{2}{3}$, donc $f_{\texttt{riri}}(x) = \frac{3x^2}{2}$ pour $x \in [-1, 1]$.
3. La probabilité d'acceptation (aire bleue divisée par aire totale du rectangle) est $\frac{2}{3}/2 = \frac{1}{3}$. Il y aura donc en moyenne $\frac{1}{1/3} = 3$ tours de boucles, soit une complexité moyenne de 6 appels à `runif`.

▶ Q2.2. Fifi

```
fifi=function() {
    x = runif(1, min=-1, max=1)
    y = runif(1, min= 0, max=1)
    return(y**2)
}
```

1. Pas de rejet ici, la méthode est directe et `x` n'est même pas utilisé. Il s'agit de la génération en passant par l'inverse de la fonction de répartition.
2. Si on renvoie $F^{-1}(u)$, c'est que $F^{-1}(u) = u^2$ et donc que $F(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$. Du coup, la densité est $f_{\texttt{fifi}}(x) = F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $[0, 1]$. Tiens, c'est presque celle de la Q1.4. C'est bien fichu quand même !
3. Le coût est de 2 appels à `runif` et devrait même être de 1 puisque le tirage de `x` est complètement inutile.

▶ Q2.3. Loulou

```
1 loulou=function() {
2     x = runif(1, min=-1, max=1)
3     while(T) {
4         y = runif(1, min= 0, max=1)
5         if(y<=x**2) { return(x) }
6     }
7 }
```

1. Non, il y a beau y avoir un `while` et une condition, ce n'est pas la forme générale d'une méthode de rejet puisque `x` n'est pas regénéré. Il s'agit d'autre chose.
2. Si on réfléchit bien : quand `x` est non nul (ce qui est vrai presque sûrement), on finira toujours pas tirer un `y` tel que `y` $\leqslant$ `x^2`. La boucle while n'a donc aucun effet sur la probabilité de renvoyer `x`, et on pourrait carrément la supprimer. La valeur renvoyée par la fonction `loulou` suit donc rigoureusement la loi utilisée en ligne 2, c'est-à-dire une loi uniforme sur $[-1, 1]$.

1. Quelle est la complexité de cette boucle inutile. Si `x` vaut $x \in [-1, 1]$, alors la probabilité d'acceptation est de $x^2 \in [0, 1]$, c'est à dire pas grand chose pour pas mal de valeurs de x. L'espérance du nombre d'itérations N lorsque `x` vaut x est donc $\mathbb{E}[N|\texttt{x} = x] = \frac{1}{x^2}$. Il suffit d'intégrer sur toutes les valeurs de x possibles en pondérant par la densité de `x` pour avoir l'espérance de N : $\mathbb{E}[N] = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2}.dx = \infty$. Et oui, ce simple changement modifie non seulement la loi mais également radicalement la complexité.
