Contrôle 2 - *Indications* de correction

- Durée : 1h
- Documents : 1 feuille manuscrite A4 autorisée
- 2 points pour la clarté (lisibilité) et de la qualité de la rédaction (rigueur).
- Seules les réponses justifiées sont prises en compte.
- Les problèmes 1 et 2 sont indépendants.

1 Partage de charge (12 pts)

On considère un serveur qui traite les requêtes en un temps aléatoire, exponentiellement distribué de moyenne $1/\mu$. Les requêtes arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ. Afin de limiter le temps d'attente et la charge du serveur, un deuxième serveur peut être mis en marche lorsque le nombre de clients dans le premier système (en attente et en service) est supérieur à un seuil K. On suppose que cette mise en route est instantanée. Ce deuxième serveur a un temps de service exponentiel de moyenne $1/\nu$. Les requêtes en attente dans le système sont alors routées vers le premier serveur disponible.

Soit $N(t)$ le nombre de clients global dans le système à l'instant t. Lorsque le nombre de clients devient inférieur à K, le deuxième serveur est instantanément arrêté.

Question 1.1 : Modélisation (1 pt)

Justifier que $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu. Donner son espace d'états.

Réponse

Lorsque $\{N(t)\}$ entre dans l'état i :
- la prochaine arrivée a lieu après un temps Y_a exponentiellement distribué de paramètre λ (processus de Poisson) $\Rightarrow q_{i,i+1} = \lambda$
- le prochain départ a lieu après un temps Y_a exponentiellement distribué de paramètre μ si $i < K$ (temps de service du serveur principal) ou $\mu + \nu$ si $i \geqslant K$ (minimum entre les temps de service des 2 serveurs). $\Rightarrow q_{i,i+1} = \mu + \nu \mathbb{1}_{[i\geqslant K]}$

On reconnaît donc une chaîne de Markov à temps continu (construction classique vue en cours). Son espace d'états est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ (il n'y a pas de limite au nombre de clients potentiellement dans le système).

Question 1.2 : Analyse (2 pts)

Donner, en le justifiant, le diagramme de transition de cette chaîne (ou son générateur infinitésimal).

Réponse

C'est un processus de naissance et de mort. Les taux de transitions sont donnés par la construction classique évoquée à la question précédente. On peut, de façon équivalente, donner

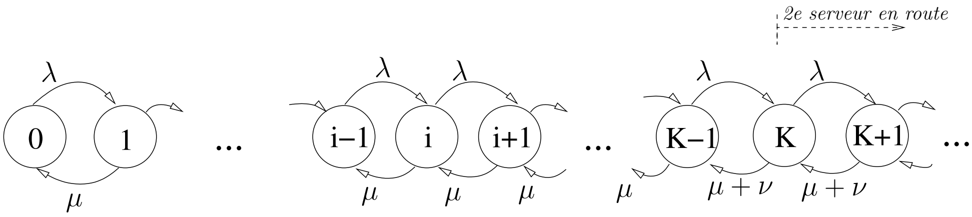

FIGURE 1 – Graphe de transition de $\{N(t)\}$

le générateur infinitésimal Q :

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots & \dots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ (indices > K) & & \mu+\nu & -(\lambda+\mu+\nu) & \lambda & 0 & \dots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix} \quad (1)$$

Remarque : Q est une matrice de dimension infinie.

Question 1.3 : Stabilité (1 pt)

Quelle est la condition de stabilité de ce système ?

Réponse

C'est un processus de naissance et de mort donc la condition de stabilité est toujours :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{i} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} < \infty$$

où λ_j (resp. μ_j) est le taux de naissance (resp. mort) depuis l'état j. Ici $\lambda_j = \lambda$ et $\mu_j = \mu + \nu \mathbb{1}_{[j \geqslant K]}$. On a donc une série géométrique de raison $\frac{\lambda}{\mu+\nu}$ (les premiers termes en $\frac{\lambda}{\mu}$ étant en nombre borné par K ils n'influent pas la convergence de la série). La condition de stabilité est donc :

$$\lambda < \mu + \nu$$

Question 1.4 : Régime stationnaire (2 pts)

Calculer, lorsqu'elle existe, la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système.

Réponse

La distribution stationnaire π_∞ existe dès que la condition de stabilité est satisfaite. On notera :

$$\pi_\infty(i) = \lim_{t\to\infty} X(t) = i.$$

Pour un processus de naissance et de mort la distribution limite est obtenue directement par la formule suivante :

$$\pi_\infty(i) = \pi_\infty(0) \prod_{j=0}^{i} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} \quad (2)$$

$$= \begin{cases} \pi_\infty(0)\frac{\lambda^i}{\mu^i} & \text{si } i \leqslant K \\ \pi_\infty(0)\frac{\lambda^i}{\mu^K(\mu+\nu)^{i-K}} & \text{si } i > K \end{cases} \quad (3)$$

où et

$$\pi_\infty(0) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{i} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=0}^{K} \frac{\lambda^i}{\mu^i} + \frac{\lambda^K}{\mu^K} \sum_{i=K+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu+\nu}\right)^{i-K}} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{\frac{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{K+1}}{1-\lambda/\mu} + \frac{\lambda^K}{\mu^K} \frac{\frac{\lambda}{\mu+\nu}}{1-\frac{\lambda}{\mu+\nu}}} \quad (6)$$

Question 1.5 : Hystérésis (2 pts)

On suppose maintenant que, pour éviter d'allumer et d'éteindre trop souvent le deuxième serveur, on attend que le nombre de clients soit redescendu au-dessous d'un seuil $L < K$ avant de l'éteindre. Expliquer pourquoi $N(t)$ n'est plus une chaîne de Markov.

Réponse

Lorsque $N(t)$ entre dans un état $L < i < K$, on ne peut pas connaître son taux de départ : si le 2^e serveur était déjà allumé dans l'état précédent, alors il l'est toujours, et le taux de départ est $\mu + \nu$; s'il ne l'était pas, alors le taux de départ est μ. On a donc besoin de l'*historique* de la trajectoire pour déterminer les taux de transition, donc ce n'est pas une chaîne de Markov.

Question 1.6 : Markov 2 (2 pts)

Proposer une autre chaîne de Markov $M(t)$ pour modéliser ce nouveau problème. Donner son espace d'états et son graphe de transition.

Réponse

On n'a pas besoin de conserver tout l'historique : il suffit de garder en mémoire le fait que le 2^e serveur soit allumé ou éteint. Notons, par exemple, $B(t) = u$ si le serveur secondaire est allumé (up) à l'instant t, $B(t) = d$ dans le cas contraire (down). Il est clair que le processus $B(t)$ n'est pas non plus une chaîne de Markov (pour connaître sa dynamique on a besoin de $N(t)$). En revanche, le processus

$$M(t) = (N(t), B(t))$$

est bien une chaîne de Markov, puisqu'à chaque état on peut calculer les taux de transition selon le graphe de la Figure 2. Son espace d'états est $\mathbb{N} \times \{u, d\}$.

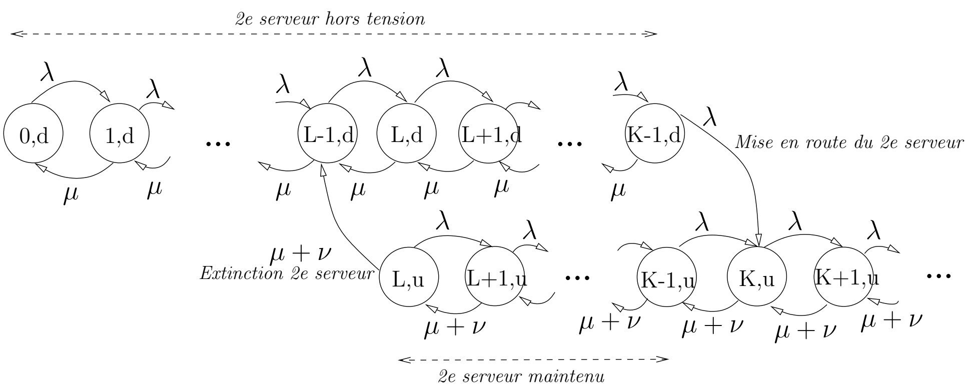

FIGURE 2 – Graphe de transition de $\{M(t)\}$

Question 1.7 : Simulation (2 pts)

Donnez les événements et variables nécessaires à la simulation de ce dernier système.

Réponse

On s'inspire directement de ce qui a été fait pour simuler la file M/M/1 :
`http://mescal.imag.fr/membres/arnaud.legrand/teaching/2016/RICM4_EP.php#orgheadline5`
Ici cependant, on souhaite ajouter comme variable d'état le fait que le serveur secondaire soit allumé ou non.

On a donc comme événements possibles :

- l'arrivée d'une tâche
- le départ d'une tâche
- l'allumage du serveur secondaire
- l'extinction du serveur secondaire

Ces deux derniers événements pourront coïncider avec des arrivées et départs en fonction de l'état courant (seuils). Ce qui serait intéressant, grâce à la simulation, ce serait d'ajouter un *délai* de mise en route, par exemple $\sim Exp(\delta)$ afin de déterminer les seuils idéaux en fonction des coûts que l'on pourrait imputer au fonctionnement des serveurs et à l'attente des clients.

2 Chocolats (6 pts)

Chaque année à Pâques[1], les mangeurs de chocolat adoptent un type de chocolat, pour une durée d'un an renouvelable. Durant cette année, il ne mangeront que le type de chocolat qu'ils ont choisi à Pâques.

Un sondage effectué sur un échantillon de 100 clients d'une chocolaterie grenobloise renommée a donné les chiffres suivants :

- parmi les mangeurs de chocolat noir, 65% sont fidèles à leur choix, tandis que 35% préfèrent essayer le chocolat au lait.
- De même, parmi les mangeurs de chocolat au lait, 70% restent fidèles et 30% changent pour le noir.

L'année du sondage, il y a 50% de mangeurs de chocolat noir et 50% de mangeurs de chocolat au lait.

Le chocolatier cherche à prévoir au mieux sa production annuelle de chaque type de chocolats.

Question 2.1 : Statistiques (2 pts)

Quelle est la précision des chiffres donnés par le sondage ?

Réponse

Même calcul qu'au précédent quick. Chaque chiffre est la moyenne des 100 réponses qui peuvent être modélisées par des variables de Bernoulli. On applique l'intervalle de confiance à 95% (ou 99% si l'on préfère) sur la moyenne. L'erreur est donc de $\pm 1.96\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{100}}$. On ne connaît pas $\hat{\sigma}$ mais on peut l'approximer ou le borner. En particulier le pire cas pour la variance est le cas équiprobable, auquel cas $\sigma = 1/2$. Donc l'erreur sur la probabilité de changer (ou de conserver son choix) est au pire de $\frac{0{,}98}{\sqrt{100}} = 0.098$ soit 9,8 "points" (sur le pourcentage)...

On suppose désormais que les chiffres récoltés sont fiables.

Question 2.2 : Prévision à court terme (1 pt)

Quelle sera la tendance dans 2 ans ? Justifier.

Réponse

On modélise la consommation de chocolat d'un client par une chaîne de Markov à temps discret : $X(n)$ vaut 0 si le client choisit le chocolat noir, 1 s'il achète du chocolat au lait l'année n. D'après le sondage $X(n)$ évolue selon la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \tag{7}$$

On nous donne également la distribution initiale $\pi_0 = (0.5, 0.5)$. La tendance à 2 ans sera la distribution de probabilité de $X(2)$:

$$\begin{aligned} \pi_2 &= \pi_0 P^2 \quad (8) \\ &\approx (0.47, 0.53) \quad (9) \end{aligned}$$

Donc la proportion de chocolat noir vendu au bout de 2 ans devrait être d'environ 47%.

1. Exercice librement inspiré du poly de M. Petitot (Enic).

Le chocolatier cherche maintenant à établir une stratégie à plus long terme afin de négocier avec ses fournisseurs.

Question 2.3 : Long terme (3 pts)

En supposant que les résultats des enquêtes ne changent pas, les proportions des mangeurs de chocolat noir et de chocolat au lait à long terme ?

Réponse

On cherche le régime stationnaire de $X(t)$. La chaîne est irréductible (les 2 états communiquent) et apériodique (transition possible $1 \to 1$ par exemple). On peut donc appliquer le théorème de convergence. La distribution stationnaire π_∞ vérifie

$$\pi_\infty = \pi_\infty P$$

ainsi que l'équation de normalisation Soit en posant $\pi_\infty = (x, y)$

$$x = 0.65x + 0.3y \Leftrightarrow 0.35x = 0.3y \Leftrightarrow x = \frac{6}{7}y.$$

En utilisant $x + y = 1$ on trouve

$$\pi_\infty = (\frac{6}{13}, \frac{7}{13})$$

Donc la tendance à long terme est de vendre environ 46% de chocolat noir.