



Devoir 1 : Dynamique de populations

La croissance des villes est un phénomène complexe et ce sujet propose d'en étudier un modèle relativement simple. Pour cela, on s'intéresse à la dynamique suivante. Considérons deux villes dont les populations à l'instant t sont respectivement $N_1(t)$ et $N_2(t)$. À l'instant $t + 1$, un nouvel immigrant choisit d'émigrer vers la ville 1 avec une probabilité $P(t) = \frac{N_1(t)}{N_1(t) + N_2(t)}$. $P(t)$ est donc une variable aléatoire que vous allez étudier à l'aide de simulations.

Pour cela, vous utiliserez R. Vous publierez vos observations sur <http://rpubs.com> à l'aide de Rstudio et enverrez l'url à arnaud.legrand@imag.fr **avant le 25 novembre à minuit** en indiquant la chaîne [RICM4-PS] dans le sujet du message.

Afin de s'assurer que nous puissions reproduire vos résultats, vous prendrez soin de fixer la valeur de la graine du générateur aléatoire à l'aide de la fonction `set.seed`.

Question 0 : Décrire votre intuition Avant de vous lancer dans la programmation, essayer de répondre aux différentes questions, l'une après l'autre (c'est important), en n'utilisant que votre intuition. Dans une première section du document publié sur `rpubs`, vous indiquerez donc votre intuition sur l'évolution de la taille des villes.

Attention, le fait que cette intuition soit correcte ou pas n'aura aucune importance sur votre note finale. Décrire votre intuition a uniquement pour but que vous commenciez à réfléchir au problème et de réaliser à quel point sa propre intuition peut être correcte ou pas.

Vous analyserez, en fin de DM, cette intuition au vu des résultats statistiques observés.

Question 1 : Premières observations de la dynamique On s'intéresse dans un premier temps à l'évolution de $P(t)$ en partant de l'état initial $(n_1(1), n_2(1)) = (1, 1)$. Tracez sur un même graphe, 10 trajectoires de $P(t)$ pour t allant de 1 à n (pour un n que vous choisirez en le justifiant). Vous commenterez vos observations.

Question 2 : Loi statistique de la limite On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ (si tant est que cette limite existe) et notamment à sa loi statistique. Afin d'avoir une idée de son allure, tracez l'histogramme de la valeur limite de $P(t)$ pour au moins un millier de trajectoires. Selon vous, quelle est la loi de la valeur limite ? Vous justifierez votre réponse.

Question 3 : Influence de la répartition initiale Il est très probable que l'état initial ait une influence sur la loi de la limite de $P(t)$. Pour comprendre l'influence de la répartition initiale, vous tracerez les histogrammes des limites des trajectoires correspondant aux états initiaux $(n_1(1), n_2(1)) \in \{(1, 1), (10, 10), (100, 100)\}$. Vous ferez de même pour les états initiaux $(n_1(1), n_2(1)) \in \{(1, 1), (1, 10), (1, 100)\}$. Vous commenterez vos observations.

Question 4 : Avez-vous changé d'avis ? Au delà des aspects purement techniques de la chose que ce devoir a pu vous apprendre, le résultat de cette étude est-il conforme à votre intuition initiale ? Pensez-vous à d'autres hypothèses que vous pourriez tester ?