Ordonnancement avec communications

Résumé: Dans ce TD, nous commençons à prendre en compte les communications dans le calcul de l'ordonnancement. Les problèmes sont bien évidemment encore plus difficiles qu'avant.

1 Ordonnancement d'un graphe FORK (avec communications)

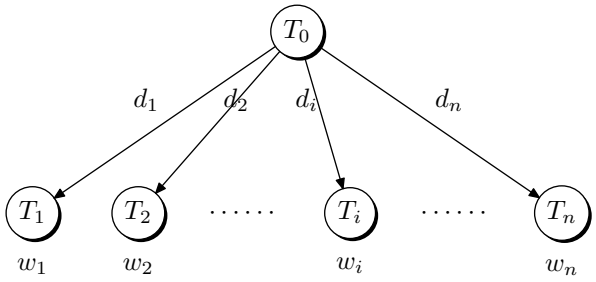


FIG. 1 – Graphe de FORK à n fils.

Définition 1 (FORK à n fils). Un graphe FORK à n fils est un graphe de tâches à $n+1$ nœuds étiquetés par $T_0, T_1, \cdots, T_n$, comme illustré figure 1. Il y a une arête entre le nœud T_0 et chacun de ses fils T_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Chaque nœud possède un poids w_i qui représente le temps de traitement de la tâche T_i. Chaque arête (T_0, T_i) possède aussi un poids correspondant au volume de données échangées d_i si la tâche T_0 et la tâche T_i ne sont pas traitées sur le même processeur.

On suppose d'abord disposer d'une infinité de processeurs identiques. On définit le problème d'optimisation suivant :

Définition 2 (FORK-SCHED-$\infty(G)$). Étant donné un graphe FORK G à n fils et un ensemble infini de processeurs identiques, quelle est la durée de l'ordonnancement σ qui minimise le temps d'exécution ?

▷ **Question 1** *Donner un algorithme polynomial résolvant FORK-SCHED-∞.* *Réponse* □

On s'intéresse maintenant au même problème avec un nombre borné de processeurs :

Définition 3 (FORK-SCHED-BOUNDED(G,p)). Étant donné un graphe FORK G à n fils et un ensemble de p processeurs identiques, quelle est la durée de l'ordonnancement σ qui minimise le temps d'exécution ?

▷ **Question 2** *Montrer que le problème de décision associé à FORK-SCHED-BOUNDED est NP-complet.*

Réponse □

On revient enfin au problème avec une infinité de processeurs identiques, mais on suppose désormais qu'un processeur ne peut communiquer qu'avec un seul processeur à la fois (modèle 1-port).

Définition 4 (FORK-SCHED-1-PORT-$\infty(G)$). Étant donné un graphe FORK G à n fils et un ensemble infini de processeurs 1-port identiques, quelle est la durée de l'ordonnancement σ qui minimise le temps d'exécution ?

▷ **Question 3** *Démontrer que le problème de décision associé à FORK-SCHED-1-PORT-∞ est NP-complet. (*Indication : on pourra se ramener à 2-Partition.*)* *Réponse* □

2 Ordonnancement d'un ensemble de tâches identiques sur une plateforme maître-esclave hétérogène.

Dans cette section, on dispose d'un ensemble de tâches identiques et indépendantes ainsi que d'une plateforme maître-esclave constituée de processeurs de vitesses différentes (voir Figure 2). Le modèle de machine utilisé est celui des machines 1-port, c'est à dire qu'il n'est pas possible de communiquer et de calculer en même temps.

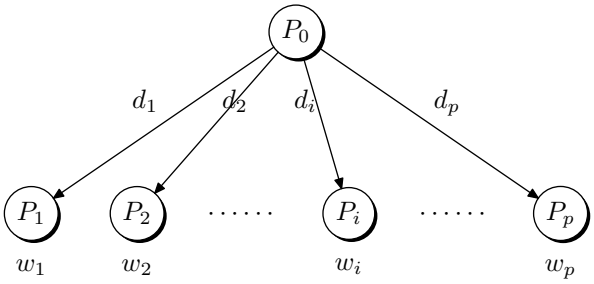


FIG. 2 – plateforme maître-esclave hétérogène

Le calcul d'une tâche sur le processeur P_i requière une communication de durée d_i avec P_0 et dure w_i.

Définition 5 (MASTER-SLAVE($(d_1, w_1), \ldots, (d_n, w_n), T$)). Étant donné un ensemble de tâches identiques et indépendantes et une plateforme maître-esclaves de processeurs multi-ports de caractéristiques $(d_1, w_1), \ldots, (d_n, w_n)$, quel est le nombre maximal de tâches que l'on puisse calculer en temps T ?

On va montrer que ce problème peut être résolu en temps polynomial.

▷ **Question 4** *Étant donné une instance $((d_1, w_1), \ldots, (d_n, w_n), T)$ de MASTER-SLAVE, créer une nouvelle instance telle que chaque processeur exécute au plus une tâche.* *Réponse* □

▷ **Question 5** *Soit $(P_{i_1}, \ldots, P_{i_k})$ une liste de processeur telle que l'on puisse déléguer une tâche à P_{i_1} puis à P_{i_2}, ..., puis à P_{i_k} en un temps inférieur à T. Montrer que l'on peut également déléguer ces tâches en prenant ces processeurs dans l'ordre des w_i décroissants.* *Réponse* □

On propose l'algorithme suivant :

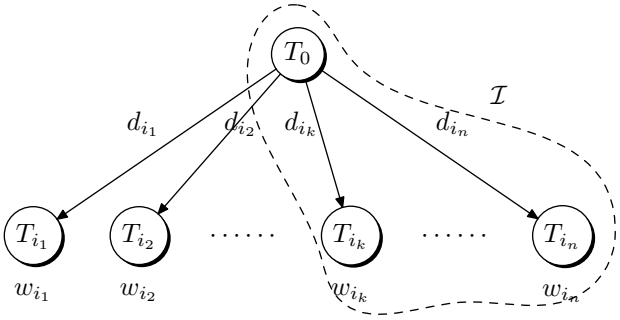
```
MASTER-SLAVE((P_1, ..., P_n), T)
1: Trier les processeurs par d_i croissant
2: L ← ∅
3: Pour i = 1 à n :
4:    Si L ∪ {P_i} est ordonnançable en temps inférieur à T Alors
5:       L ← L ∪ {P_i}
6: Renvoyer (L)
```

▷ **Question 6** *Supposons qu'il existe une liste de processeurs $(P_{i_1}, \ldots, P_{i_k})$ qui marche en temps T dans cet ordre. Montrer que l'algorithme glouton précédent renvoie au moins n valeurs.*
Réponse □

3 Réponses aux exercices

▷ Question 1, page 1

Soit G un graphe de FORK G à n fils. Commençons par quelques remarques simples concernant un ordonnancement optimal des tâches. La tâche T_0 étant traitée sur le processeur P_0, il convient de déterminer quelles sont les tâches qui vont être traitées sur P_0 et quelles sont celles qui vont être déléguées à un autre processeur. En effet, si deux tâches sont exécutées sur un processeur $P_i \neq P_0$, on n'augmente pas la durée de l'ordonnancement en plaçant ces deux tâches sur des processeurs différents. On sait donc qu'il existe un ordonnancement optimal tel qu'un certain ensemble $\mathcal{I} = \{T_{i_k}, \ldots, T_{i_n}\}$ de tâches est calculé sur le processeur P_0 et tel que les autres tâches sont toutes ordonnancées sur des processeurs distincts :



La durée de ce type d'ordonnancement est :

$$T = \max\left(\sum_{i\in\mathcal{I}} w_i, \{w_0 + (d_j + w_j) \mid j \notin \mathcal{I}\}\right) .$$

Supposons qu'il existe deux tâches $T_j \notin \mathcal{I}$ et $T_k \in \mathcal{I}$ telles que $w_k + d_k < w_j + d_j$: alors on n'augmente pas le temps de l'ordonnancement en enlevant la tâche T_k de $\mathcal{I}$ et en plaçant celle-ci toute seule sur un autre processeur que le processeur P_0. On en déduit qu'il existe un ordonnancement optimal tel que toutes les tâches de $\mathcal{I}$ ont une valeur de $w_i + d_i$ supérieure à celles n'appartenant pas à $\mathcal{I}$.

Pour obtenir un ordonnancement optimal, il suffit alors de trier les tâches T_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$ par $w_i + d_i$ croissant, et de trouver k minimisant $\max(\sum_{i=k}^{n} w_i, w_{k-1} + d_{k-1})$: on affectera alors les $n - k$ dernières tâches à P_0.

▷ Question 2, page 1

La question est facile, on se ramène à 2-Partition comme pour la démonstration de la NP-complétude de Pb(p). Considérons une instance de 2-Partition, c'est-à-dire un ensemble $\mathcal{A} = \{a_1, \cdots, a_n\}$ de n entiers. Nous allons transformer cette instance en une instance du problème FORK-SCHED-BOUNDED avec deux processeurs qui aura une solution si et seulement si l'instance originale du problème de 2-Partition avait une solution.

Définissons un graphe de FORK G constitué de $n + 1$ tâches $\{T_0, \ldots, \mathcal{T}_n\}$:

- le père T_0 a un poids $w_0 = 0$;
- pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ le nœud T_i a un poids $w_i = a_i$;
- le volume des données de chaque tâche est nul, c'est-à-dire $d_i = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

Bien sûr, la taille de l'instance de FORK-SCHED-BOUNDED est linéaire en la taille de l'instance initiale de 2-Partition. Montrons que décider s'il est possible de trouver un ordonnancement du graphe G en temps inférieur à $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i$ est équivalent à savoir résoudre notre instance de 2-Partition.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que l'instance originale de 2-Partition ait une solution : il existe alors $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$, deux partitions de $\{1, \cdots, n\}$ telles que $\sum_{\mathcal{I}_1} a_i = \sum_{\mathcal{I}_2} a_i = S$. En ordonnançant T_0 ainsi que les T_i pour $i \in \mathcal{I}_1$ sur le premier processeur et les T_i pour $i \in \mathcal{I}_2$ sur le second processeurs, on obtient un ordonnancement de durée $\max(\sum_{i\in\mathcal{I}_1} w_i, \sum_{i\in\mathcal{I}_2} w_i) = T$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons l'existence d'un ordonnancement de notre ensemble de tâches en temps T sur 2 processeurs. Dans ce cas, le processeur P_0 s'occupe d'un ensemble de tâches $\mathcal{I}_1$ et le processeur P_1 d'un ensemble de tâches $\mathcal{I}_2$. On a donc $\max(\sum_{i\in\mathcal{I}_1} w_i, \sum_{i\in\mathcal{I}_2} w_i) = T$ et $\sum_{i\in\mathcal{I}_1} w_i + \sum_{i\in\mathcal{I}_2} w_i = 2T$, ce qui signifie que $\sum_{i\in\mathcal{I}_1} w_i = \sum_{i\in\mathcal{I}_2} w_i = T$, c'est-à-dire qu'il existe une solution à notre instance initiale de 2-Partition.

▷ Question 3, page 1

Considérons une instance de 2-Partition, c'est-à-dire un ensemble $\mathcal{A} = \{a_1, \cdots, a_n\}$ de n entiers. Nous allons transformer cette instance en une instance du problème FORK-SCHED-1-PORT-∞ qui aura une solution si et seulement si l'instance originale du problème de 2-Partition en avait une.

Soit $S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$ (si S n'est pas entier alors il n'y a pas de solution au problème 2-Partition). Soit $M = \max a_i$ et $m = \min a_i$. Définissons un graphe FORK G constitué de $n+4$ tâches $\{T_0, \ldots, \mathcal{T}_{n+3}\}$:

- le père T_0 a un poids $w_0 = 0$;
- pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ le nœud T_i a un poids $w_i = 10(M + a_i + 1)$;
- les trois derniers nœuds T_{n+1}, T_{n+2} et T_{n+3} ont pour poids :
$$w_{n+1} = w_{n+2} = w_{n+3} = 10(M + m) + 1\,;$$
- le volume des données correspond au volume des calculs, c'est-à-dire $d_i = w_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n+3$.

Montrons que décider s'il est possible de trouver un ordonnancement du graphe G en temps inférieur à $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i + 2w_{n+1} = 5n(M+1) + 10S + 20(M+m) + 2$ est équivalent à savoir résoudre notre instance de 2-Partition.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que l'instance originale de 2-Partition ait une solution : il existe alors $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$, deux sous-ensembles de $\{1, \cdots, n\}$ tels que $\sum_{\mathcal{I}_1} a_i = \sum_{\mathcal{I}_2} a_i = S$. Construisons notre ordonnancement de la façon suivante :

- Le processeur P_0 est en charge de l'exécution de la tâche T_0 et des tâches T_i pour $i \in \mathcal{I}_1$ et des tâches T_{n+1} et T_{n+2}. P_0 a besoin exactement de T unités de temps pour effectuer l'ensemble de ses calculs puisque $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i + 2w_{n+1}$.
- Chaque tâche restante est assignée à un processeur différent. Nous utilisons donc $|\mathcal{I}_2| + 1$ processeurs en plus de P_0.
- Les communications sont faites suivant l'ordre croissant des indices des tâches : ainsi le dernier message envoyé concerne la tâche T_{n+3}.
- Le processeur responsable de T_{n+3} est donc prêt à commencer son exécution à l'instant $\sum_{\mathcal{I}_2} d_i + d_{n+3}$ et termine son exécution à l'instant
$$\sum_{\mathcal{I}_2} d_i + d_{n+3} + w_{n+3} = T$$
- Tous les autres processeurs terminent leur exécution plus tôt. En effet, ils reçoivent leur message au plus tard en $\sum_{\mathcal{I}_2} d_i$ et leur durée exécution w_i est inférieure à $2w_{n+3}$.

Nous avons donc construit un ordonnancement valide de notre instance de FORK-SCHED-1-PORT-∞.

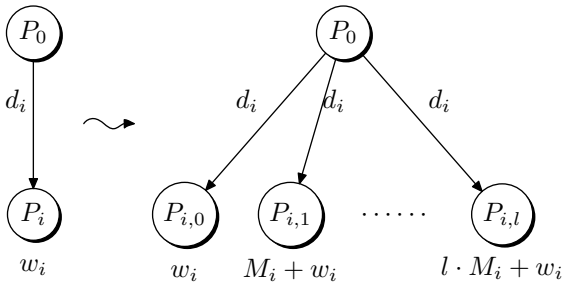
$\boxed{\Rightarrow}$ Réciproquement, supposons que notre instance de FORK-SCHED-1-PORT-∞ possède une solution, c'est-à-dire un ordonnancement σ qui permet d'obtenir un temps d'exécution inférieur à T. Notons P_0 le processeur qui exécute la tâche T_0 et $\mathcal{I} = \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant n+3 \text{ et } T_i \text{ est traitée sur } P_0\}$ l'ensemble des indices des tâches affectées à P_0. Le temps de calcul de P_0 est au moins de $A = \sum_{i\in\mathcal{I}} w_i$. Le processeur qui reçoit le dernier message

de P_0 pour exécuter la tâche T_{last} (dont l'indice n'est pas dans $\mathcal{I}$) ne peut pas terminer son exécution avant $B = \sum_{i \notin \mathcal{I}} d_i + w_{\text{last}}$. Comme l'ordonnancement σ donne une solution à notre instance de FORK-SCHED-1-PORT-∞, nous avons $\max(A, B) \leqslant T$. Or $A + B = \sum_i w_i + w_{\text{last}} = 2T + w_{\text{last}} - w_{n+1}$ est supérieur ou égal à $2T$. Nécessairement, $A = B = T$ et $w_{n+1} = w_{\text{last}}$. Comme $A = B$, nous avons en particulier $A \equiv B[10]$. Donc $\mathcal{I}$ contient au moins deux indices parmi $\{n+1, n+2, n+3\}$. En considérant $\mathcal{I}_1$ égal à $\mathcal{I}$ privé de ces deux indices et $\mathcal{I}_2 = \{1, \cdots, n\} \backslash \mathcal{I}_1$, on obtient une solution de l'instance initiale de 2-Partition.

Clairement, la taille de l'instance de FORK-SCHED-1-PORT-∞ est linéaire en la taille de l'instance de 2-Partition, ce qui achève la preuve de NP-complétude.

▷ Question 4, page 2

Il suffit de transformer le processeur i de la façon suivante :



avec $M = \max(d_i, w_i)$ et $l = \lfloor \frac{T - w_i}{M} \rfloor$.

▷ Question 5, page 2

Réordonnons les processeurs dans l'ordre des w_i décroissants et notons donc $i_1, \ldots, i_k$ l'ordre qui marche. On a donc :

$$\begin{array}{lll} (L_1) & d_{i_1} + w_{i_1} & \leqslant T \\ (L_2) & d_{i_1} + d_{i_2} + w_{i_2} & \leqslant T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (L_k) & d_{i_1} + d_{i_2} + \cdots + d_{i_k} + w_{i_k} & \leqslant T \end{array}$$

Soient $j_1, \ldots, j_k$ tels que $i_{j_1} = 1$, $i_{j_2} = 2$, ... et $i_{j_k} = k$. Démontrons par récurrence que les équations induites par l'ordre des w_i décroissants sont vérifiées.

i) On a $d_1 + w_1 \leqslant T$. En effet, dans l'équation L_{j_1} on a $d_{i_1} + \cdots + d_{i_{j_1 - 1}} + d_1 + w_1 \leqslant T$.

ii) On a $d_1 + d_2 + w_2 \leqslant T$. En effet, il y a deux possibilité :
   - soit $j_2 > j_1$ et alors l'inégalité L_{j_2} comprend les termes $d_{i_{j_1}} + d_{i_{j_2}} + w_{i_{j_2}}$ et donc on a bien $d_1 + d_2 + w_2 \leqslant T$,
   - soit $j_2 < j_1$ et alors l'inégalité L_{j_1} comprend les termes $d_{i_{j_1}} + d_{i_{j_2}} + w_{i_{j_1}}$ et, en utilisant le fait que $w_2 \leqslant w_1$, on a bien $d_1 + d_2 + w_2 \leqslant T$.

iii) Passons au cas général. Soit $i < k$. Supposons que pour tout $l \leqslant i$ on ait $d_1 + \cdots + d_l + w_l \leqslant T$ et montrons que $d_1 + \ldots d_{i+1} + w_{i+1} \leqslant T$. Notons $m_i = \max(j_1, \ldots, j_i)$.
   - Soit $j_{i+1} > m_i$ et on regarde directement l'équation $L_{j_{i+1}}$. En effet cette équation contient les termes $d_1, d_2, \ldots, d_i$ (car $j_{i+1} > m_i$) ainsi que $d_{i+1} + w_{i+1}$ et donc on a bien $d_1 + \ldots d_{i+1} + w_{i+1} \leqslant T$.
   - Soit $j_{i+1} < m_i$ et on regarde l'équation L_{m_i}. En effet cette équation contient les termes $d_1, d_2, \ldots, d_{i+1}$ ainsi que $d_i + w_i$. On en déduit donc que $d_1 + \ldots d_{i+1} + w_i \leqslant T$. En utilisant le fait que $w_i \geqslant w_{i+1}$, on obtient donc bien $d_1 + \ldots d_{i+1} + w_{i+1} \leqslant T$.

▷ Question 6, page 2

Pour alléger les notations, on dira qu'un ensemble d'indices $\mathcal{I} = \{i_1, \ldots, i_k\}$ est ordonnançable si et seulement s'il existe un ordonnancement valide en temps inférieur à T des processeurs $\{P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}\}$.

On va montrer que l'algorithme renvoie des valeurs $\{g_1, \ldots, g_k\}$ et que cet ensemble est bien ordonnançable. On supposera dans la suite que l'ensemble $\{i_1, \ldots, i_k\}$ est trié par c_i croissant.

i) On sait que l'ensemble des indices $\mathcal{I} = \{i_1, \ldots, i_k\}$ est ordonnançable et donc que chaque $\{i_j\}$ est ordonnançable. Ceci nous garantie donc l'existence de g_1 et que $g_1 \leqslant \min(i_1, \ldots, ß_k)$.
Si $g_1 \in \mathcal{I}$ il existe bien une solution à k éléments contenant g_1. Dans le cas contraire, $\mathcal{I}$ étant ordonnançable dans un certain ordre, en remplaçant le premier indice i_{j_1} de $\mathcal{I}$ à être ordonnancé par g_1, on obtient toujours un ensemble d'équations consistant : la validité de la première équation ($c_{g_1} + w_{g_1} \leqslant T$) découle de la définition de g_1 et la validité des autres équations du fait que l'on a remplacé $c_{i_{j_1}}$ par c_{g_1} qui est plus petit.

ii) On sait qu'il existe un ensemble $\mathcal{I} = \{g_1, i'_1, \ldots, i'_{k-1}\}$ ordonnançable. Donc pour tout j, on a $\{g_1, i'_j\}$ ordonnançable, ce qui nous garantie l'existence de g_2 ainsi que le fait que $g_2 \leqslant \min(i'_1, \ldots, i'_{k-1})$.
Si $g_2 \in \{i'_1, \ldots, i'_{k-1}\}$ alors, on sait qu'il existe un ensemble à k éléments contenant g_1 et g_2. Dans le cas contraire, on va remplacer la première inégalité qui ne concerne pas g_1 par l'inégalité induite par g_2 :
   - g_1 est l'indice du premier processeur qui reçoit une tâche et f est l'indice du deuxième. Étant donné que $\{g_1, g_2\}$ est ordonnançable, en remplaçant f par g_2 dans $\mathcal{I}$, on satisfait toujours les deux premières inégalités. Les autres découlent du fait que $c_{g_1} \leqslant c_f$.
   - L'indice f du premier processeur qui reçoit une tâche n'est pas g_1. Dans ce cas, en remplaçant f par g_2 dans $\mathcal{I}$, la première inégalité est clairement vérifiée ($\{g_2\}$ est ordonnançable) et les suivantes découlent du fait que $c_{g_1} \leqslant c_f$.

   Il existe donc bien une solution à k éléments contenant g_1 et g_2.

iii) Passons au cas général. Supposons qu'il existe un ensemble $\mathcal{I} = \{g_1, \ldots, g_{j-1}, i'_1, \ldots, i'_{k-j+1}\}$ ordonnançable. Étant donné que pour tout $l \in [\![1, k-j+1]\!]$: $\{g_1, \ldots, g_{j-1}, i'_l\}$ est ordonnançable, on est assuré de l'existence de g_j et que $g_i \leqslant \min(i'_1, \ldots, i'_{k-j+1})$.
Si $g_j \in \{i'_1, \ldots, i'_{k-j+1}\}$ alors on est assuré de l'existence d'un ensemble à k éléments ordonnançable et contenant $g_1, \ldots, g_{j-1}$ et g_j. Dans le cas contraire, on va remplacer la première inégalité L_f qui ne concerne pas $g_1, g_2, \ldots$ ou g_{j-1} par l'inégalité induite par g_j.
Si la première inégalité concerne g_{i_1}, la deuxième g_{i_2}, ..., la $l^{\text{ème}}$ g_{i_l} et la $l+1^{\text{ème}}$ i'_f, alors i) $\{g_{i_1}, \ldots, gi_l, i'_f\}$ (en temps que sous ensemble de $\mathcal{I}$) et ii) $\{g_{i_1}, \ldots, g_{i_l}, g_j\}$ (en temps que sous ensemble de $\{g_1, \ldots, g_j\}$) sont ordonnançables. Quand on remplace i'_f par g_j dans $\mathcal{I}$, les l premières équations sont inchangées, la $l+1^{\text{ème}}$ découle de ii), et les suivantes du fait que $c_{g_j} \leqslant c_{i'_f}$.