KHÔLLE PCSI 3

ARNAUD LEGRAND

Exercice 1 : Espaces Euclidiens.
1). Soit E un euclidien. On dit d'un endomorphisme φ qu'il est symétrique si pour tout x, y de E il vérifie $\langle\varphi(x),y\rangle = \langle x,\varphi(y)\rangle$. On note $E_\lambda = \{x \in E/\varphi(x) = \lambda x\}$. Montrer que les E_λ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ sont deux à deux orthogonaux.
2). Soit $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de réels. Donner trois preuves différentes de l'inégalité :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant n\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

3). Soit A dans $GL_n(\mathbb{R})$ et $B = {}^tA.A$. En identifiant $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$, montrer que $\langle X,Y\rangle = {}^tX.B.Y$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
4). Déterminer les réels a et b tels que la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ soit orthogonale. Interprétation géométrique.
5). Soit E un espace de dimension n : prouver l'existence d'une base $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E, constituée de vecteurs unitaires et telle que $\forall i \in [\![1,n]\!] : \forall j \in [\![1,n]\!] : i \neq j \Rightarrow \|u_i - u_j\| = 1$.
6). Soit $U = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un vecteur normé. Prouver que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A_{ij} = \delta_{ij} - 2u_iu_j$ est orthogonale.
7). $\mathbb{R}^4$ est munie de sa structure naturelle d'espace euclidien. On note $\mathcal{B}$ sa base canonnique, F le s.e..v d'équation $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ x+y-z-t & = & 0 \end{array}\right.$ dans cette base, et p la projection orthogonale sur F. Déterminer la matrice de p dans $\mathcal{B}$. Pour $u = (x,y,z,t)$, calculer $d(u,F)$.

Exercice 2 : Une produit scalaire de matrices. On définit $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}\,({}^tB.A)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1). Prouver que cela en fait un espace euclidien.
2). Prouver que $\|A.B\| \leqslant \|A\|.\|B\|$.
3). En supposant A et B symétriques, établir que $\sqrt{\mathrm{tr}\,((A+B)^2)} \leqslant \sqrt{\mathrm{tr}\,(A^2)} + \sqrt{\mathrm{tr}\,(B^2)}$.

Exercice 3 : Un produit scalaire sur les polynômes. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
1). Prouver l'existance d'une base orthonormée $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant pour tout $i \in [\![0,n]\!]$: $\deg(P_i) = i$.
2). Prouver que pour $i \geqslant 1$, P_i possède i racines simples, toutes dans $]0,1[$. Indication : notant $t_1,\dots t_r$ les racines d'ordre *impair* de P_i situées dans]0,1[, et $Q(t) = (t-t_1)\dots(t-t_r)$, considérer $\langle P_i,Q\rangle$ pour établir qu'on ne peut avoir $i < r$.

Exercice 4 : Quelques propriétés fortes. Soit E un euclidien et φ une application de E dans E.
1). Montrer que si φ vérifie $\forall x,y \in E : \langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ alors φ est linéaire.
2). A-t-on le même résultat si on suppose simplement $\forall x \in E : \|\varphi(x)\| = \|x\|$?
3). On suppose $\forall x,y \in E : \|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x-y\|$ et que $\varphi(0) = 0$. Montrer que φ est linéaire.
4). Que peut-on dire de φ si on enlève l'hypothèse $\varphi(0) = 0$?

Exercice 5 : Équations différentielles. Résolution et traçés des solutions des équations différentielles suivantes.
1). $y'\cos x + y\sin x = 3\tan x$
2). $x.y' - y = ax^2\cos x$
3). $x.y' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$
4). $y' + y\tan x = -\cos^2 x$

Date: Année 2001.