KHÔLLE PCSI 3

ARNAUD LEGRAND

Exercice 1 : Cours.
1). Définition d'une fonction convexe. Exemples et contre-exemples. Lien entre convexité d'une fonction et son graphe.
2). Donner la formule du déterminant en dimension 2 et en dimension 3.
3). Expliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour l'inversion de matrices.
4). Définition d'un espace euclidien et exemples.
5). Inégalité de Cauchy-Schwartz : énoncé et démonstration.
6). Procédé d'orthonormalisation de Schmidt : présentation
7). Groupe orthogonal : caractérisation géométrique et matricielle.

Exercice 2 : Fonctions convexes.
1). Soient f et g deux fonctions convexes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. $f+g$, fg, et λf (pour $\lambda \in \mathbb{R}$) sont-elles convexes ? La composée de deux fonctions convexes est-elle convexe ? Trouver une condition suffisante sur g pour que $g \circ f$ le soit.
2). Prouver que toute fonction convexe et majorée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est constante. Ce résultat reste-t-il valable pour une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$?
3). Soient f et g deux fonctions convexes sur un intervalle I. On suppose qu'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que $af + bg$ soit affine. Montrer que f et g sont affines.
4). Soit $(f_j)_{j\in J}$ une famille de fonctions convexes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On définit alors $\varphi : x \in I \mapsto \sup_{j\in J} f_j(x)$. Montrer que φ est convexe.

Exercice 3 : Des suites convexes. Soit E le $\mathbb{R}$-ev des suites de réels. Une suite a est dite positive (notée $a \geqslant 0$) ssi $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geqslant 0$. On note Δ l'application de E dans E qui à a associe Δa définie par $(\Delta a)_n = a_{n+1} - a_n$. On note $\Delta^0 = Id_E$ et $\Delta^{k+1} = \Delta^k \circ \Delta$. Une suite a est dite convexe lorsque $\Delta^2(a) \geqslant 0$. Elle est absolument monotone si, $\forall k \in \mathbb{N} : \Delta^k(a) \geqslant 0$. On note E^+ (respectivement E^c et E^a) l'ensemble des suites positives (respectivement convexes et absolument monotones).
1). Montrer (rapidement !) que Δ est un endomorphisme de E et préciser son noyeau.
2). Expliciter les termes généraux de $\Delta^2(a)$ et $\Delta^3(a)$ en fonction de a. En déduire les noyeaux respectifs de Δ^2 et Δ^3.
3). Prouver que $(\Delta^k a)_n = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p C_k^p a_{n+k-p}$. En déduire la dimension du noyeau de Δ^k.
4). Montrer que E^+, E^c et E^a sont des parties convexes de E mais ne sont pas des s.e.v de E.
5). Déterminer les réels α tels que $e^{n\alpha}$ soit absolument monotone.
6). Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. En admettant l'existence de $\theta \in]-1, 1[$ tel que $f(1) - 2f(0) + f(-1) = f''(\theta)$, montrer que si f'' est positive, alors la suite de terme général $f(n)$ est convexe.
7). Soient $p < q$ deux naturels. Exprimer $a_p - a_q$ comme somme de termes de la suite Δa.
8). Soit $a \in E$ vérifiant $\Delta a \geqslant 0$ et $\Delta^2 a \geqslant 0$. Montrer que pour tous naturels n et p, on a $a_{n+p} - a_n \geqslant a_p - a_0$. En déduire que si a converge, elle est constante.

Exercice 4 : Calculs d'intégrales. Calculer les intégrales suivantes :

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{t^4 + t^2 + 1} \cdot dt$

ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1 + t^4} \cdot dt$

Date: Année 2001.

iii) $\displaystyle\int_0^1 t\cos^3 t\cdot dt$

iv) $\displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\cdot dt$

v) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+\tan t)\cdot dt$

Exercice 5 : Espaces Euclidiens.
1). Soit E un euclidien. On dit d'un endomorphisme φ qu'il est symétrique si pour tout x, y de E il vérifie $\langle\varphi(x),y\rangle = \langle x,\varphi(y\rangle$. On note $E_\lambda = \{x\in E/\varphi(x)=\lambda x\}$. Montrer que les E_λ pour $\lambda\in\mathbb{R}$ sont deux à deux orthogonaux.
2). Soit $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de réels. Donner trois preuves différentes de l'inégalité :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leqslant n\sum_{i=1}^n a_i^2$$

3). Soit A dans $GL_n(\mathbb{R})$ et $B = {}^tA.A$. En identifiant $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$, montrer que $\langle X,Y\rangle = {}^tX.B.Y$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
4). Déterminer les réels a et b tels que la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b & b\\ b & a & b & b\\ b & b & a & b\\ b & b & b & a\end{pmatrix}$ soit orthogonale. Interprétation géométrique.
5). Soit E un espace de dimension n : prouver l'existence d'une base $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E, constituée de vecteurs unitaires et telle que $\forall i\in[\![1,n]\!] : \forall j\in[\![1,n]\!] : i\neq j\Rightarrow\|u_i-u_j\|=1$.

Exercice 6 : Une produit scalaire de matrices. On définit $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}\,({}^tB.A)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1). Prouver que cela en fait un espace euclidien.
2). Prouver que $\|A.B\|\leqslant\|A\|.\|B\|$.
3). En supposant A et B symétriques, établir que $\sqrt{\mathrm{tr}\,((A+B)^2)}\leqslant\sqrt{\mathrm{tr}\,(A^2)}+\sqrt{\mathrm{tr}\,(B^2)}$.

Exercice 7 : Un produit scalaire sur les polynômes. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
1). Prouver l'existance d'une base orthonormée $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant pour tout $i\in[\![0,n]\!]$: $\deg(P_i)=i$.
2). Prouver que pour $i\geqslant 1$, P_i possède i racines simples, toutes dans $]0,1[$. Indication : notant $t_1,\dots t_r$ les racines d'ordre *impair* de P_i situées dans $]0,1[$, et $Q(t)=(t-t_1)\dots(t-t_r)$, considérer $\langle P_i,Q\rangle$ pour établir qu'on ne peut avoir $i<r$.

Exercice 8 : Quelques propriétés fortes. Soit E un euclidien et φ une application de E dans E.
1). Montrer que si φ vérifie $\forall x,y\in E : \langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ alors φ est linéaire.
2). A-t-on le même résultat si on suppose simplement $\forall x\in E : \|\varphi(x)\| = \|x\|$?
3). On suppose $\forall x,y\in E : \|\varphi(x)-\varphi(y)\| = \|x-y\|$ et que $\varphi(0)=0$. Montrer que φ est linéaire.
4). Que peut-on dire de φ si on enlève l'hypothèse $\varphi(0)=0$?