KHÔLLE PCSI 3

ARNAUD LEGRAND

Exercice 1 : Ensembles et fonctions.

1). Soit E un ensemble. i) exhiber une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$. ii) Prouver qu'aucune application de E dans $\mathcal{P}(E)$ n'est surjective.
Indication : Considérer $B_f = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$

2). Soient X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$, $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$. Montrer que :

i) $f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B)$. A-t-on $f(X \backslash A) = Y \backslash f(A)$?

ii) $f^{-1}(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} f^{-1}(A_i)$ où $\forall i \in \mathcal{I} : A_i \in \mathcal{P}(Y)$.

3). Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective.

i) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \leqslant n$. Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}}$.

ii) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \geqslant n$. Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}}$.

iii) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \neq n$. Montrer que $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < n\}$ et $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > n\}$ sont infinis.

4). Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie d'ensembles deux à deux disjoints. Montrer qu'au moins un de ces sensembles n'est inclus dans aucun autre.

5). Pour i dans $\mathbb{Z}$ et j dans $\mathbb{N}$, on définit $A_{i,j} = [\![i-j, i+j]\!]$. Que sont $X = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_{i,j}$ et $Y = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_{i,j}$

6). Soit f une fonction de E dans F. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i) f est injective

ii) $\forall A \subseteq E : f^{-1}\big(f(A)\big) = A$

iii) il existe g de F dans E telle que $g \circ f = Id_E$

iv) $\forall p : F \to E, \forall q : F \to E : \big(f \circ p = f \circ q \Rightarrow p = q\big)$

7). Soient A et B deux parties de E et $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. Donner une CNS pour que f soit injective, puis pour que f soit surjective. Expliciter f^{-1} lorsque f est bijective.

8). Soit E un ensemble et f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même, croissante pour l'inclusion. On note $E_- = \{A \subseteq E \mid f(A) \subseteq A\}$ et $E_+ = \{B \subseteq E \mid B \subseteq f(B)\}$, puis $X = \bigcap_{A \in E_-} A$ et $Y = \bigcup_{B \in E_+} B$. Prouver que $f(X) = X$ et $f(Y) = Y$.

Exercice 2 : Complexes.

1). Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$. En déduire une forme algébrique de $\sin(\frac{2\pi}{5})$.

2). Exprimer $\tan(6\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$. En déduire une expression simple de $\tan(\frac{\pi}{24})$.

3). Soient a, b, n des entiers naturels. Prouver qu'il existe des entiers naturels x et y tels que $(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2$.

4). Déterminer les parties finies de $\mathbb{C}$ stables pour la multiplication.

5). Développer $(Z + 1)^7$ puis résoudre $Z^6 + 21Z^4 + 35Z^2 + 7 = 0$.

Exercice 3 : Le corps des réels.

Date: Année 2000.

1). Soient $a < b$ deux réels strictement positifs. On note $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}[ka, kb]$.

i) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $]A, +\infty[\subseteq E$.

ii) Déterminer $\inf\{A \mid]A, +\infty[\subseteq E\}$

2). On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{p + q\sqrt{2} \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que :

i) $\forall\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tel que $0 < x \leqslant \varepsilon$ (on pourra considérer $\lambda = \inf\left(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\cap\mathbb{R}_+^*\right)$)

ii) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que $\forall y \in \mathbb{R} : \forall\varepsilon > 0 : \exists x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tel que $|x - y| < \varepsilon$

Les résultats précédents restent-ils valables si l'on remplace 2 par $n \in \mathbb{N}$?
3). Montrer que l'intersection d'une famille quelconque d'intervalles est, soit vide, soit un intervalle. Donner une condition suffisante pour que la réusion de deux intervalles soit encore un intervalle.
4). Expliciter $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$.
5). Soit $E = \{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \mid (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}$. Déterminer $\inf E$ et $\sup E$.
6). Montrer que $A = \{\frac{p}{2^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \Rightarrow]x, y[\cap A \neq \emptyset$.

Exercice 4 : Suites réelles.
1). Soit u une suite de réels convergente et prenant ses valeurs dans $\mathbb{Z}$. Prouver qu'une telle suite est stationnaire, c'est à dire que $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0}$.
2). Établir $x > 0 \Rightarrow 1 - x < \frac{1}{1+x} < 1$ puis étudier $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3). Étudier les suites de terme général :

i) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)^2-1}$ ii) $n^2 \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{\sum_{k=1}^{n} k^3}$ iii) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ iv) $\frac{(2n)^n}{n^{2n}}$ v) $2^n \sin(2^{-n}\theta)$

4). Pour $n \geqslant 1$, on considère $f_n : x \in \mathbb{R}_*^+ \to \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) - 1$. Prouver que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution sur $]0, +\infty[$. Notant a_n cette solution, étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}*}$.
5). Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui converge vers x. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} : q_n > 0$. Prouver que la suite q tend vers $+\infty$ et que, si $x > 0$, il en est de même pour p.
6). Construire une suite u de réels divergente telle que pour tout $k \geqslant 2$, la suite extraite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
7). On définit une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fixant $x_0 > 0$ et en posant $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i) La définition de la suite x est elle valide ?

ii) Montrer que x diverge.

iii) Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - \sqrt{x_0^2 + 2n} = 0$.

iv) On prend $x_0 = 5$; prouver que $45 < x_{1000} < 45,1$.

8). On définit $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ pour $x \in [0, 1]$ et $\lambda > 1$. Soit $u_0 \in]0, 1[$; on définit $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.

i) Résoudre $f_\lambda(x) = x$ dans $]0, 1[$. On notera x_λ cette solution.

ii) Calculer $f'_\lambda(x_\lambda)$ et en déduire une condition sur λ pour que $|f'_\lambda(x_\lambda)| < 1$.

iii) En déduire que, pour λ vérifiant la condition trouvée en ii), il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall u_0 \in]x_\lambda - \epsilon, x_\lambda + \epsilon[: u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_\lambda$.

9). Donner un équivalent simple de $\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n - 1$ quand $n \to +\infty$.

10). Déterminer la limite de $n^2\left((n+1)^{1/n}-n^{1/n}\right)$.

Exercice 5 : Récurrence.
1). Le problème de Joséphus : n personnes (numérotées de 1 à n) prises au piège décident de se donner la mort plutôt que de se rendre. Mais le suicide leur étant interdit, ils se mettent en cercle et, à tour de rôle, dans le sens des aiguilles d'une montre, ils assassinent leur voisin de gauche. Une seule personne survivra à ce massacre. Quel est son numéro (Attention, quand on est mort, on ne peut pas tuer son voisin de gauche...) ?
2). Étudier la suite définie par récurrence $Q_0=\alpha$, $Q_1=\beta$ et $Q_n=\frac{1+Q_{n-1}}{Q_{n-2}}$ (condition d'existence, forme close, ...).
3). Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$p^n>n^p$". Montrer $\mathcal{P}(p+1)$ pour $p\geqslant 3$. Montrer $\mathcal{P}(n)$ pour $3\leqslant p<n$.
4). Donner au moins deux méthodes pour montrer $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Montrer de 2 (3 ?...) façons $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. Combien de parties du plan sont séparées par n droites deux à deux sécantes mais dont trois ne sont pas concourantes ?

Exercice 6 : Sommation.
Étudier les sommmes suivantes :

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k(k+1)}$ iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}$ iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k^3}{k!}$ v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{n!}$

vi) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)$ vii) $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\max(i,j)$ viii) $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\min(i,j)$ ix) $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}|i-j|$

x) $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\i+j=n}}ij$ xi) $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i,j,k\leqslant n\\i+j+k=n}}ijk$

Exercice 7 : Dénombrement.

1). Démontrer les égalités suivantes :

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_r^kC_s^{n-k}=C_n^{r+s}$ ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_m^kC_s^{n-k}=C_{n+1}^{m+1}$ pour $m,n\leqslant 0$ iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_{m+k}^k=C_{m+n+1}^n$

iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_{m+k}^k=C_{m+n+1}^n$ v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ vi) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

vii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\sum_{k=0}^{n}k\right)^2$

2). Soit E un ensemble de dix naturels deux à deux distincts, compris entre 1 et 100. Montrer qu'il existe deux parties A et B de E telles que $\sum_{a\in A}a=\sum_{b\in B}b$.
3). Soit E un ensemble fini non vide, de cardinal n. Calculer :

$$\sum_{X\in\mathcal{P}(E)}(-1)^{|X|}\qquad\sum_{X\in\mathcal{P}(E)}|X|\qquad\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}|X\cap Y|$$

4). Dans un échiquier, compter les carrés à cotés parallèles au quadrillage, et dont les sommets sont des centres de cases ; calculer la valeur moyenne de l'aire de ces carrés.

Exercice 8 : Développements limités.
1). Limite en 0 des expressions suivantes :

i) $\displaystyle\frac{\ln(1-x\,\mathrm{Atg}(e^x-1))}{1-\cos x}$ ii) $\displaystyle\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{th}x}-\frac{1}{\tan x}\right)$ iii) $\displaystyle\frac{x^{\sin x}-(\sin x)^x}{x^{\operatorname{sh}x}-(\operatorname{sh}x)^x}$

2). Équivalent en 0 des expressions suivantes :

i) $(2+\cos x)(2+\operatorname{ch} x)-9$ ii) $\operatorname{ch} x - \dfrac{12+5x^2}{12-5x^2}$

3). Calculer le DL_n en 0 de $x \mapsto \arctan x$.
4). Calculer le DL_4 en 0 de $x \mapsto \cos \operatorname{ch} x$.
5). Calculer le DL_6 en 0 de $x \mapsto x/\operatorname{sh} x$.
6). Calculer le DL_4 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+\ln(1+x)}$.
7). Étudier $x \mapsto x.e^{\frac{1}{1-x}}$.
8). Étudier $x \mapsto x^{1-\frac{1}{x}}$.

Exercice 9 : Continuité.
1). Étudier la continuité de $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
2). Prouver que toute application continue $f : [a,b] \mapsto [a,b]$ possède au moins un point fixe.
3). Soit f, g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Prouver que $\min(f,g)$, $\max(f,g)$ sont continues. Retrouver ce résultat en les exprimant en fonction de f, g et $|f-g|$.
4). Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha \in [0, \frac{p-1}{p}]$ tel que $f(\alpha) = f(\alpha + \frac{1}{p})$. Est-ce toujours vrai si on remplace $\frac{1}{p}$ par $\delta \in]0,1[$?

Exercice 10 : Un peu d'Algèbre.
1). Soit $(\mathcal{A}, +, .)$ un anneau commutatif. On définit $\star$ par $a \star b = a + b - a.b$.
  i) Montrer que $\star$ est une loi de composition interne associative.
  ii) Soit $b \in \mathcal{A}$. Donner une C.N.S. sur b pour que b soit inversible pour $\star$.
  iii) Quel est le plus grand groupe (pour $\star$) contenu dans $\mathcal{A}$?
2). Quelques questions pour remettre les idées en place :
  i) $(\mathrm{Bij}(\mathbb{N}), +)$ est-il un groupe ?
  ii) $(\mathrm{Bij}(\mathbb{N}), \circ)$ est-il un groupe ?
  iii) $(\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N}), +)$ est-il un groupe ?
  iv) $(\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N}), *)$ est-il un groupe ?
3). Montrer que la réunion d'une suite croissante de sous-groupes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un groupe G est elle même un sous-groupe de G.
4). Montrer qu'un groupe G est abélien si et seulement si $x \mapsto x^{-1}$ est un automorphisme de G.
5). Si $(G, \star)$ est un groupe, montrer que $Z(G) = \{x \in G : \forall y \in G : x \star y = y \star x\}$ est un sous-groupe commutatif de G.
6). Si G est un groupe et H et K sont deux sous-groupes, montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$.
7). On va s'intéresser aux sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$
  i) Montrer que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe.
  ii) Que peut-on dire du module des éléments d'un sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*, \times)$?
  iii) Que peut-on dire de leur argument ?
  iv) Conclure.
8). On définit $\star$ par $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ avec la convention $\sqrt[3]{a^3} = a$ pour $a < 0$. Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.
9). Soit E un ensemble fini non vide muni d'une loi $\star$ associative telle que E possède un élément neutre e et tout élément est régulier vis-a-vis de $\star$. Montrer que $(E, \star)$ est un groupe et que l'hypothèse E fini est nécessaire.

10). Soit G un groupe. A tout élément a de G on associe $\varphi_a : x \in G \mapsto axa^{-1}$.

i) Montrer pour tout a dans G, φ_a est un automorphisme de G.
ii) Montrer que $\Phi : a \in G \mapsto \varphi_a$ est un homomorphisme de g dans le groupe $\mathrm{Aut}(G)$ des automorphismes de G.
iii) Que dire de Φ lorsque G est abélien ?
iv) Que représente le noyeau de Φ ?
v) On dit d'un sous-groupe H qu'il est normal si $\forall a \in G \varphi_a(H) = H$. Montrer que l'intersection de deux sous- groupe normaux est normale.
vi) Montrer que le centre d'un groupe est normal.
vii) Montrer que le noyeau $\ker(\varphi)$ d'un homomorphisme de groupe $\varphi : G \to H$ est un sous-groupe normal de G.

Exercice 11 : Généralités vectorielles.

1). Montrer que la réunion d'une suite croissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espace vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E est elle même un sous-espace vectoriel de E

2). Soit E le $\mathbb{R}$-e.v. des suites réelles, F le s.e.v. de E constitué des suites qui convergent, G le s.e.v. des suites constantes et H le s.e.v. des suites de limite nulle. Montrer que $F = G \oplus H$.

3). Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, notons f_λ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $e^{\lambda x}$. Montrer que $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

4). Montrer que $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-e.v $\mathbb{R}$.

5). Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les applications $x \mapsto \sin 2x$, $x \mapsto \cos 2x$, $x \mapsto \sin^2 x$ sont-elles indépendantes ? Même question avec $x \mapsto \cos^2 x$, $x \mapsto \cos 2x$, $x \mapsto \sin^2 x$.

6). Soit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. prouver que l'on munit E d'une structure de $\mathbb{R}$-e.v. en définissant pour tout élément (a, b) et (c, d) de E et tout réel λ : $(a, b) + (c, d) = (ac, b + d)$ et $\lambda.(a, b) = (a^\lambda, \lambda b)$.

7). Quelques questions sur l'espace des suites réelles.

i) L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge est-il un s.e.v. du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles ?
ii) L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2$ converge est-il un s.e.v. du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles ?

8). E est le $\mathbb{R}$-e.v. des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note φ l'application qui à f dans E associe $\varphi(f)$ définie par $\varphi(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$. Prouver que φ est un endomorphisme. Est-il injectif ? Est-il surjectif ?

9). Soit E le $\mathbb{R}$-e.v. des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F l'ensemble des f de E qui sont dérivables en 0 et nulles en 0.

i) Montrer que F est un s.e.v. de E.
ii) Montrer que $\varphi : E \mapsto E$ définie par $\varphi(f)(x) = x.f(x)$ est un endomorphisme de E
iii) Montrer que $\mathrm{im}\,\varphi = F$.
iv) Déterminer $\ker \varphi$.

10). Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie.

i) Calculer la dimension de $\mathcal{L}(E)$.
ii) En se souvenant que $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, justifier et expliquer la notation $P(f)$ pour f dans $\mathcal{L}(E)$ et P dans $\mathbb{K}[X]$.
iii) Montrer que pout tout f dans $\mathcal{L}(E)$, il existe un polynôme P dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$.
iv) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E vérifiant $\sum_{k=0}^{n} a_k f^k = 0$. Prouver que si $a_0 \neq 0$ alors f est inversible.

11). Soit E un $\mathbb{R}$-e.v de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -Id_E$

i) Soit $x \in E\backslash\{0\}$. Montrer que $(x, f(x))$ est libre.

ii) Montrer que la dimension de E est paire.

iii) Construire un tel endomorphisme dans un espace de dimension infinie.

Exercice 12 : Généralités polynômiales.
1). Prouver que $P \mapsto (1-X)P + X^2P'$ est un endomorphisme injectif mais non surjectif de $\mathbb{C}[X]$.
2). Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un et un seul élément P_n de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$ (si on ne connait rien sur les espaces vectoriels de dimension finie, on pourra s'interesser à $((X+1)^k + X^k)_{k\in\mathbb{N}})$. Exprimer ${P'}_n$ en fonction de P_{n-1}.
3). On défini par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la suite de polynômes suivante : $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$. Établir : $\forall n \in \mathbb{N} : {P_{n+1}}^2 - P_{n+2}P_n = 1$.
4). Prouver que $\varphi : P \mapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$ (si on ne connait rien sur les espaces vectoriels de dimension finie, on pourra s'interesser à $(X^k - kX^{k-1})_{k\in\mathbb{N}^*}$) et expliciter sa dérivée.
5). Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ (non nul!!) tel que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.
6). Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X]/X^4 \mid P(2X) - 2P^2(X) + 1\}$. Montrer que $\forall P_0 \in E : \forall A \in \mathbb{R}[X] : P_0 + X^4A \in E$ puis déterminer E.
7). Expliciter la dérivée n-iéme de $(X-a)^n(X-b)^n$ et en déduire $\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{C}_n^k)^2$.

Exercice 13 : Taylor, Rolles et autres accroissements finis...
1). Montrer que $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x \sin\frac{1}{x}$ et $g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^2 \sin\frac{1}{x}$ peuvent être prolongée par continuité en 0. Étudier la dérivabilité de ces prolongements.
2). Soit $f : x \mapsto \tan x$. Prouver que $f^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$, où P_n est un polynôme de degré $n+1$, de parité opposée à celle de n, de coefficient dominant $n!$ et à coefficients tous positifs ou nuls.
3). Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et dérivable. On suppose $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. La réciproque est -elle vraie ?
4). Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, et deux fois dérivables dans $]a, b[$ et vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $\forall c \in]a, b[: \exists\gamma \in]a, b[: f(c) = \dfrac{(c-a)(c-b)}{2} f''(\gamma)$
5). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ et $x_f \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_f) = x_f$ et $\mid f'(x_f) \mid < 1$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall x \in]x_f - \epsilon, x_f + \epsilon[: \lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_f$ où f^n représente le n^{ième} itéré de f.
6). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{3-x^2}{2}$ si $x < 1$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \geqslant 1$. Peut-on appliquer le T.A.F. à f sur $[0, 2]$? Déterminer tous les $c \in]0, 2[$ tels que $f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2}$.
7). Prouver que pour $x \neq 0$, l'équation $\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{6}\mathrm{ch}\,(\theta x)$ possède une et une seule solution $\theta \in]0, 1[$. On note $\theta(x)$ cette solution. Déterminer $\lim_{x\to 0} \theta(x)$.

Exercice 14 : Intégrales.
1). Soit $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}([0, a], \mathbb{R})$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^a \frac{f(t)}{1+nt} dt$.

2). Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+t^n} dt$.

3). Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Établir que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 |f(t)|^n dt\right)^{1/n} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

4). Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} I_n$ puis montrer que $1 - I_n \sim_\infty \frac{\ln 2}{n}$ à l'aide d'une intégration par partie.

5). Déterminer l'ensemble des fonctions f continues vérifiant $\displaystyle\int_0^x f = \frac{xf(x)}{3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6). Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ puis montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} = \frac{\pi}{n\sin(\pi/n)}$.

Exercice 15 : Calculs d'intégrales. Calculer les intégrales suivantes : 1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{t^4+t^2+1} \cdot dt$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^4} \cdot dt$ 3) $\displaystyle\int_0^1 t\cos^3 t \cdot dt$ 4) $\displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t} \cdot dt$ 5) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+\tan t) \cdot dt$

Exercice 16 : Riemann.
1). Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\frac{k\pi}{n+1}$.
2). Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \cos(\frac{k\pi}{n})$.
3). Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^n}{n}$.
4). Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

Exercice 17 : Quelques exercices autours de la dimension finie.
1). Prouver que $P \mapsto (1-X)P + X^2P'$ est un endomorphisme injectif mais non surjectif de $\mathbb{C}[X]$.
2). Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un et un seul élément P_n de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$. Exprimer P'_n en fonction de P_{n-1}.
3). Montrer que $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un $\mathbb{Q}$-e.v. Quelle est sa dimension ?
4). Prouver que $\varphi : P \mapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
5). Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie.

i) Calculer la dimension de $\mathcal{L}(E)$.
ii) En se souvenant que $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, justifier et expliquer la notation $P(f)$ pour f dans $\mathcal{L}(E)$ et P dans $\mathbb{K}[X]$.
iii) Montrer que pout tout f dans $\mathcal{L}(E)$, il existe un polynôme P dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$.
iv) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E vérifiant $\sum_{k=0}^{n} a_k f^k = 0$. Prouver que si $a_0 \neq 0$ alors f est inversible.

6). Soit E un $\mathbb{R}$-e.v de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -Id_E$

i) Soit $x \in E\backslash\{0\}$. Montrer que $(x, f(x))$ est libre.
ii) Montrer que la dimension de E est paire.
iii) Construire un tel endomorphisme dans un espace de dimension infinie.

Exercice 18 : Quelques exercices sur les matrices.
1). Soit $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Calculer A^2, B^2, AB et BA.
ii) Soit E le s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par A et B. Préciser sa dimension.
iii) Montrer que c'est une sous algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

iv) Est-ce un anneau intègre ?

v) Quels sont ses inversibles ?

2). Soit A la matrice carrée d'ordre n définie par $A_{i,j} = 0$ si $i > j$ et $A_{i,j} = 1$ sinon. Calculer A^2, A^3 et A^{-1}.

3). Soit E l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que c'est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

4). Soit $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A. Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une base.

5). Soit $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$. Soit A et B définies par $A_{p,q} = \omega^{(p-1)(q-1)}$ et $B_{p,q} = \overline{A_{p,q}}$.

i) Calculer A^2, B^2, AB et BA.

ii) En déduire que A est inversible et préciser son inverse.

6). Soit A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

i) Montrer (à la main !) qu'il existe α, β réels tels que $A^2 - \alpha A + \beta I = 0$.

ii) Montrer que le s.e.v. E engendré par A et I est un anneau commutatif et que si $B \in E$ est inversible, alors B^{-1} est dans E.

iii) A quelle condition E est-il un corps ?

iv) Que trouve-t-on quand $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?

7). Déterminer les applications f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$, soit un groupe.

8). Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on note $M_{a,b,c}$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

i) Montrer que l'ensemble E des $M_{a,b,c}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

ii) Préciser sa dimension et en donner une base "simple".

iii) Montrer que $M_{a,b,c}$ est inversible ssi $a \neq 0$ et expliciter $(M_{a,b,c})^{-1}$.

iv) Calculer $(M_{a,b,c})^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

9). Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^2 - A + 3I_n = 0$.

i) Prouver que A est inversible et préciser A^{-1}.

ii) Plus généralement, si P est un polynôme, à quelle condition doit-il satisfaire pour que $P(A) = 0$ implique A inversible ?

iii) Si cette condition est satisfaite, que vaut A^{-1} ?